

# Realizzazione di un ponteggio metallico per la Gran Guglia del Duomo di Milano: analisi, modellazione, verifica ed identificazione dinamica

## Construction of a metal scaffold for the main spire of the Milan cathedral: analysis, modelling, verification and dynamic identification

R. Nascimbene<sup>1</sup>, E. Fagà<sup>2</sup>, A. Cigada<sup>3</sup>, M. Vanali<sup>4</sup>, M. Moratti<sup>5</sup>, R. Pinho<sup>6</sup>, G.M. Calvi<sup>7</sup> ■

### Sommario

La guglia maggiore del Duomo di Milano è un esempio unico di architettura gotica e un'opera ardita di ingegneria. La sua realizzazione, iniziata nel 1763 grazie a Francesco Croce, è stata a lungo rimandata a causa delle incertezze legate alla capacità della sottostruttura di sopportarne il peso, all'elevata quota ed alla sua esposizione all'azione del vento. Il progetto di Croce prevedeva la costruzione di una mensola di marmo di quasi trenta metri composta da un elemento cavo centrale e pilastri in marmo, in cui i singoli elementi erano connessi mediante elementi in ferro per garantire capacità resistente a trazione. Dopo i primi problemi risalenti al 1842, il degrado avvenuto nel corso degli anni ha interessato non solo gli elementi in acciaio, corrosi a causa dell'inquinamento, ma anche gli elementi in marmo. Per tale motivo, il consiglio della Veneranda Fabbrica del Duomo ha intrapreso un intervento di restauro più esteso dei precedenti, che richiede la costruzione di un ponteggio metallico che circonda la guglia per tutta la sua altezza. Nel presente lavoro è descritto lo sviluppo dello studio di fattibilità di tale ponteggio, comprendente sia la modellazione della struttura esistente, sia la successiva fase di verifica, realizzata attraverso una serie di misure ambientali ed un'analisi modale operativa della guglia stessa.

### Abstract

*The main spire of the Milan cathedral has represented, ever since its design, a unique example of the gothic architecture and an ambitious structural project. The construction of the spire, designed by Francesco Croce, was delayed for many years due to the uncertainties in the capacity of the supporting structure to sustain its weight and due to the exposure to the wind action, given its height.*

*The project by Croce involved the construction of a spire of marble of almost thirty meters, which could be considered as light when compared to traditional massive spires; in particular, iron elements were placed between the marble blocks in order to provide the main spire structure with tensile strength.*

*In 1842, the corrosion of some of the iron elements, led to the collapse of a portion of the "belvedere alto". Despite the numerous interventions, the marble elements of the spire suffered, as well, a significant degradation over the years, so the Veneranda Fabbrica del Duomo undertook a more extensive restoration operation, which included the construction of a metal scaffolding surrounding the spire along its entire height. The current work describes the feasibility study which has been carried out, in which advanced numerical techniques were used to model a portion of the existing structure and to identify any significant structural problem for the spire, or the dome, caused by the construction of the scaffolding.*

### 1. Introduzione

La guglia maggiore del Duomo di Milano ha rappresentato fin dalla sua progettazione un esempio unico di architettura gotica e al contempo un'opera ardita di ingegneria. Benché si possa supporre che la sua realizzazione fosse

prevista già nel progetto originale dell'opera (Ferrari da Passano, 2003 e Brivio, 2003), la sua costruzione fu a lungo rimandata a causa da un lato delle incertezze riguardo alla capacità della sottostruttura di sopportarne il peso, dall'altro dalle preoccupazioni che destava l'e-

<sup>1</sup> Centro Europeo di Formazione e Ricerca in Ingegneria Sismica, Eucentre, Pavia - ✉ roberto.nascimbene@eucentre.it

<sup>2</sup> Centro Europeo di Formazione e Ricerca in Ingegneria Sismica, Eucentre, Pavia - ✉ ettore.faga@eucentre.it

<sup>3</sup> Politecnico di Milano, Dipartimento di Meccanica, Milano - ✉ alfredo.cigada@polimi.it

<sup>4</sup> Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Parma - ✉ marcello.vanali@unipr.it

<sup>5</sup> Studio Calvi, Ingegneria e Architettura, Pavia - ✉ matteo.moratti@studiocalvi.eu

<sup>6</sup> EQCO, Earthquake Consulting, Pavia - ✉ rui.pinho@eqco.it

<sup>7</sup> Studio Calvi, Ingegneria e Architettura - Luss, Pavia - ✉ gm.calvi@studiocalvi.eu

levata quota a cui doveva essere edificata ed in particolare alla sua esposizione all'azione del vento.

La struttura che oggi è possibile ammirare in sommità alla cattedrale milanese è stata progettata da Francesco Croce, in qualità di architetto della Fabbrica del Duomo di Milano, nel 1763 (Stolfi, 2003), benché numerosi studi fossero già stati condotti da altri eminenti personalità dell'epoca nell'ambito dell'ingegneria e dell'architettura.

Il progetto di Croce prevedeva la costruzione di una mensola di marmo di quasi trenta metri caratterizzata da una considerevole leggerezza se confrontata con le tradizionali guglie massicce, in quanto composta sapientemente da un elemento cavo centrale e otto pilastri in marmo connessi lungo l'altezza tramite una scala a chiocciola. Al fine di garantire una capacità resistente a trazione all'impianto strutturale si prevedeva la connessione fra i blocchi di marmo mediante elementi in ferro. Le perplessità riguardo ad un progetto così ardito spinsero il Capitolo della Fabbrica del Duomo a richiedere pareri esterni riguardo alla sua fattibilità a illustri matematici dell'epoca (Stolfi, 2003), i quali dopo un'attenta analisi del problema, in particolare rispetto alla capacità della struttura esistente di sorreggere la guglia, espressero giudizi sufficientemente confortanti da far intraprendere la costruzione dell'opera secondo il progetto di Croce. La costruzione della struttura della guglia fu quindi ultimata nel 1767.

La guglia maggiore tuttavia, manifestò i primi problemi già nel 1842, quando a causa del degrado dei materiali ed in particolare della corrosione degli elementi in ferro si ebbe il crollo di una parte del belvedere alto; in seguito a questo evento si avviò un processo di restauro

conservativo dell'opera sotto la supervisione dell'architetto conte Ambrogio Nava (Nava, 1845). La corrosione delle parti in ferro della guglia continuò negli anni e si aggravò notevolmente a causa del forte inquinamento, tanto da portare negli anni '60 ad intraprendere un nuovo intervento di sostituzione delle parti metalliche. Tuttavia il degrado negli anni ha anche interessato gli elementi in marmo, i quali nelle parti ispezionabili della guglia risultano significativamente danneggiati, questo ha spinto il consiglio della Veneranda Fabbrica del Duomo a intraprendere un intervento di restauro più esteso dei precedenti che preveda la sostituzione delle parti danneggiate irrimediabilmente ed il recupero di quelle meno severamente deteriorate. Tale estesa opera di restauro richiede la costruzione di un ponteggio metallico che circondi la guglia per tutta la sua altezza e nonostante il ponteggio non rappresenti un'opera ardita, la sua collocazione lo rende problematico per gli stessi aspetti che avevano reso preoccupante il progetto della guglia: il supporto "difficile" (Corradi e Calvi, 2009) su cui andrà ad essere collocato e il considerevole incremento di area esposta all'azione del vento.

Le preoccupazioni relative alla costruzione del ponteggio metallico hanno spinto allo sviluppo di uno studio di fattibilità che prevedesse la modellazione della struttura esistente mediante le attuali tecniche numeriche allo scopo di identificare eventuali criticità per la guglia maggiore o per la cupola interna al tiburio legate alla costruzione del ponteggio. Alla modellazione è seguita una fase di verifica e di confronto dei risultati, realizzata attraverso una serie di misure ambientali ed una analisi modale operativa della guglia stessa.

## 2. Struttura analizzata

### 2.1 La Gran Guglia e il tiburio del Duomo di Milano

La porzione dell'imponente struttura del Duomo di Milano analizzata in questo lavoro comprende la Gran Guglia e il tiburio su cui si innesta, all'interno del quale sono presenti le vele che compongono la cupola visibile dall'interno del Duomo.

La geometria della struttura è stata desunta dai disegni in possesso della Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano. La Gran Guglia (Figura 1a) si eleva dal tiburio per oltre trenta metri, la sua sezione è costituita da un elemento cilindrico cavo circondato da otto pilastri disposti a formare una corona, la connessione degli elementi verticali è ottenuta mediante una scala a chiocciola che oltre a fare da percorso, funge

da elemento irrigidente nel piano orizzontale. L'intera struttura è realizzata in blocchi di marmo di Candoglia connessi fra loro con l'ausilio di elementi in ferro. La sezione della Gran Guglia aumenta alla base, in corrispondenza del primo terrazzo partono otto archi rampanti che gradatamente allargano la sezione ottagonale della guglia fino a farla coincidere con quella del tiburio sottostante (Figura 1a).

L'incremento di sezione alla base consente, in accordo ai canoni architettonici gotici, di trasferire i carichi verticali ai piloni del tiburio secondo due percorsi precisi, così da evitare zone ad eccessiva concentrazione di sforzo. Il primo percorso si sviluppa attraverso gli otto archi rampanti (Figura 1a) presenti alla base della guglia che trasferiscono direttamente i carichi verticali ai piloni del tiburio, mentre il secondo a partire

dalla sommità della cupola attraverso le costolature in marmo (Figura 1b) sulle quali si innestano le volte interne. L'incremento di sezione alla base della guglia comporta da un lato una riduzione delle tensioni medie negli elementi, dall'altro l'insorgere di spinte orizzontali, riequilibrata sapientemente mediante l'introduzione di elementi architettonici quali i pinnacoli presenti nel punto di innesto degli archi rampanti. Alla base, la sezione della guglia (Figura 1c) è costituita dal nucleo cilindrico cavo, da due ordini concentrici

di pilastri disposti a pianta ottagonale e da otto piccole pareti in marmo su cui gravano gli archi rampanti, poste al di sopra degli otto piloni del tiburio. Il nucleo cavo centrale ed il primo ordine di pilastri gravano su un anello di muratura, in parte in pietra, posto a chiusura in sommità della cupola, i restanti elementi verticali presenti alla base della guglia trasferiscono i carichi verticali a otto pareti in muratura che collegano i vertici del tiburio ottagonale con il suo centro e che gravano direttamente sulle costolature lapidee della cupola (Figura 1b). La struttura del tiburio è principalmente composta da otto piloni con nucleo in muratura e rivestiti in marmo di Candoglia, dalle otto costolature in pietra che si sviluppano dalla base dei piloni del tiburio fino all'anello presente in sommità della cupola e da due ordini di volte in muratura.

Le vele della cupola interna sono sorrette dalle otto costolature in marmo e da archi a sesto acuto in muratura presenti sulle otto pareti del tiburio e gravanti sui suoi otto piloni. La copertura del tiburio è realizzata mediante volte a botte a sezione variabile innestate sulle pareti in muratura radiali poste al di sopra delle costolature. Lungo le otto pareti del tiburio sono presenti due ordini di grandi aperture che hanno il duplice scopo di fornire luce all'interno della struttura e allo stesso tempo di alleggerirla notevolmente, in accordo ai canoni dell'architettura gotica (Figura 1b).

Figura 1  
a) Sezione della guglia maggiore,  
b) Sezione verticale del tiburio.

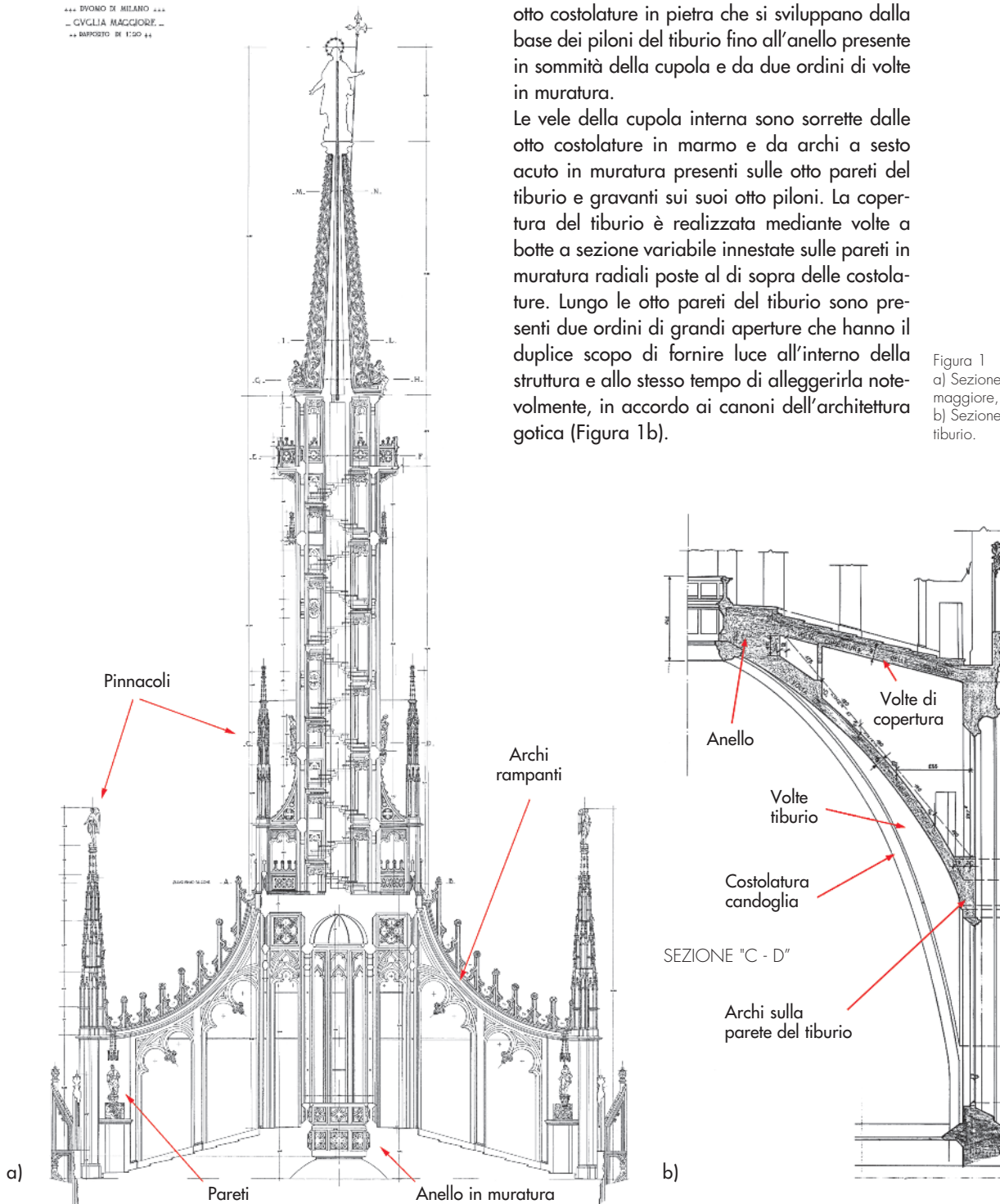
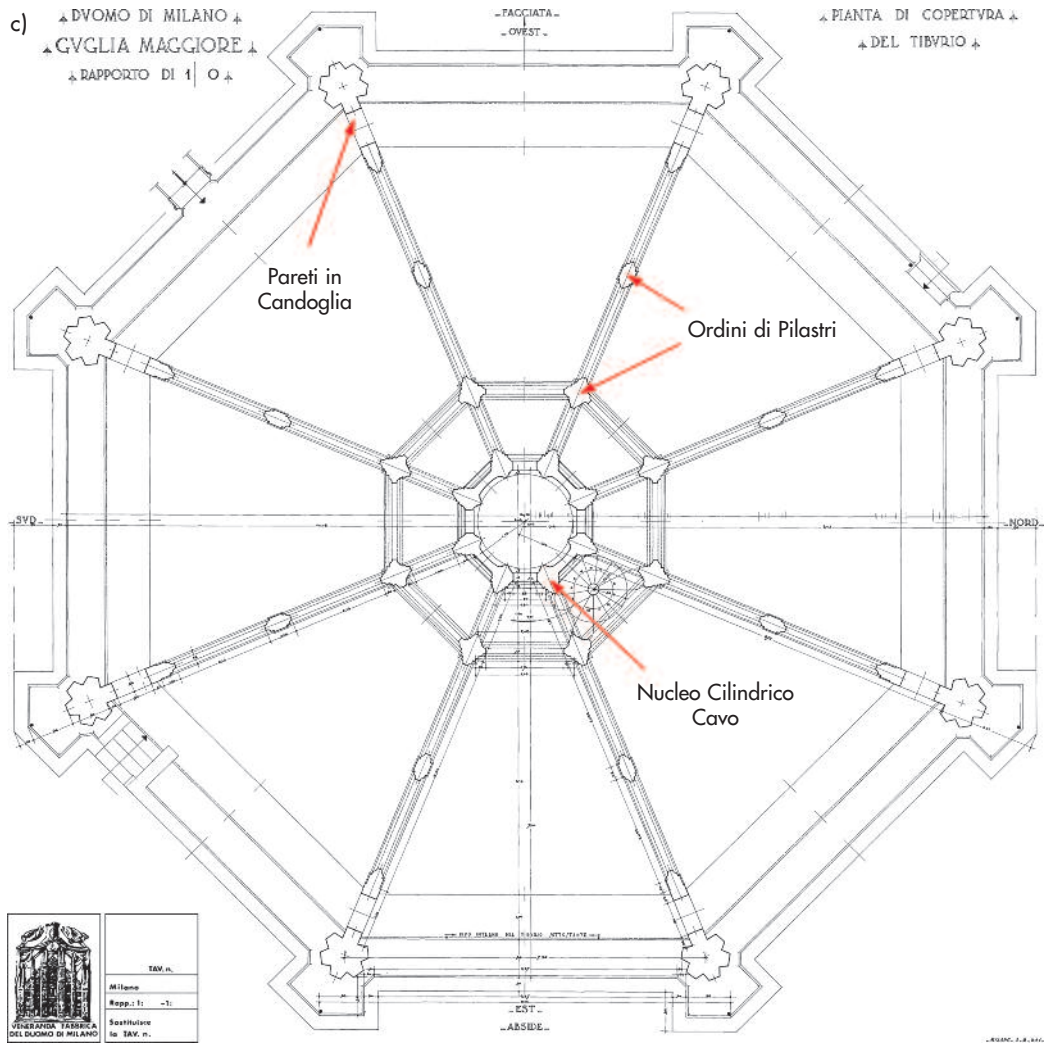


Figura 1  
c) Pianta di copertura del tiburio (cortesia della Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano).



La geometria della struttura osservata nei disegni architettonici è stata verificata mediante un rilievo in situ, durante il quale è stato inoltre possibile identificare la presenza di catene metalliche inserite con il passare degli anni a rinforzo della struttura. Due serie di catene metalliche sono presenti a collegamento degli otto piloni del tiburio lungo i suoi lati per assorbire gli sforzi di trazione circolari derivanti dalle spinte orizzontali delle volte e della guglia, ulteriori catene sono state osservate a collegamento della sommità degli archi a sesto acuto su cui si innestano le vele della cupola e delle pareti interne al tiburio, con lo scopo di ridurre le spinte delle vele fuori dal piano sugli archi. Oltre alle catene, dall'altezza del primo terrazzo fino alla cima della Gran Guglia, è presente un rinforzo elicoidale in acciaio inossidabile intorno al nucleo cilindrico cavo.

La parte di struttura analizzata è sostanzialmente composta da due tipologie murarie, una muratura a blocchi lapidei di grandi dimensioni in marmo di Candoglia e una muratura di elementi pieni in laterizio. La definizione delle proprietà

meccaniche di queste due tipologie è complicata dal forte stato di deterioramento dei materiali, in particolare a livello della guglia, causato dalla lunga esposizione agli agenti atmosferici e aggravato dal forte inquinamento, oltre che dall'impossibilità di eseguire prove sperimentali su porzioni significative di muratura. La scelta delle proprietà meccaniche per le murature è stata quindi condotta facendo riferimento a valori usuali per le tipologie considerate, ridotte per tenere conto dello stato di degrado (Tabella 1). Al fine di determinare l'influenza sulla risposta strutturale delle caratteristiche meccaniche assunte si è prevista l'esecuzione di un'analisi di sensitività facendo variare del 20% i valori ipotizzati.

## 2.2 Ponteggio metallico

La campagna di restauri pianificata dalla Veneranda Fabbrica del Duomo per la Gran Guglia richiede l'erezione di un ponteggio metallico che la circonda per tutta la sua considerevole altezza. La soluzione presa in considerazione prevede la realizzazione di un ponteggio in tubo giunto con due ordini concentrici di montanti connessi su più

Tabella 1 - Proprietà meccaniche materiali

Materiale	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	E [MPa]	$\nu$
Muratura in marmo di Candoglia	27	7200 ± 20%	0.2
Muratura in laterizio	18	4800 ± 20%	0.2
Riempimento	19	1000 ± 20%	0.15
Acciaio catene	78.5	210000	0.3

livelli da tavole metalliche e elementi orizzontali irrigidenti. Allo scopo di rendere il ponteggio quanto più possibile indipendente dalla guglia si è previsto di trasferire i carichi verticali unicamente alla base dello stesso, in corrispondenza della parte centrale della copertura del tiburio e si sono previste connessioni nel piano orizzontale su più livelli fino a circa metà altezza della struttura (Figura 2). Nella metà superiore del ponteggio non è presente alcun collegamento con la struttura preesistente e la rigidità nei confronti delle azioni laterali è garantita dalle connessioni inferiori e da un sistema di controventi, necessari a evitare eccessive vibrazioni

durante le fasi di restauro e deformazioni laterali non compatibili con lo spazio libero interposto fra il ponteggio e la guglia.

La struttura del ponteggio non sarebbe di per sé problematica, tuttavia la sua interazione con la Gran Guglia rappresenta una criticità, in particolare a causa della notevole variazione di superficie esposta al vento e delle sollecitazioni che a causa di questo possono essere trasmesse alla struttura preesistente.

### 2.3 Analisi modale operativa

Un'apposita campagna di misure è stata pensata e realizzata per identificare sperimentalmente i

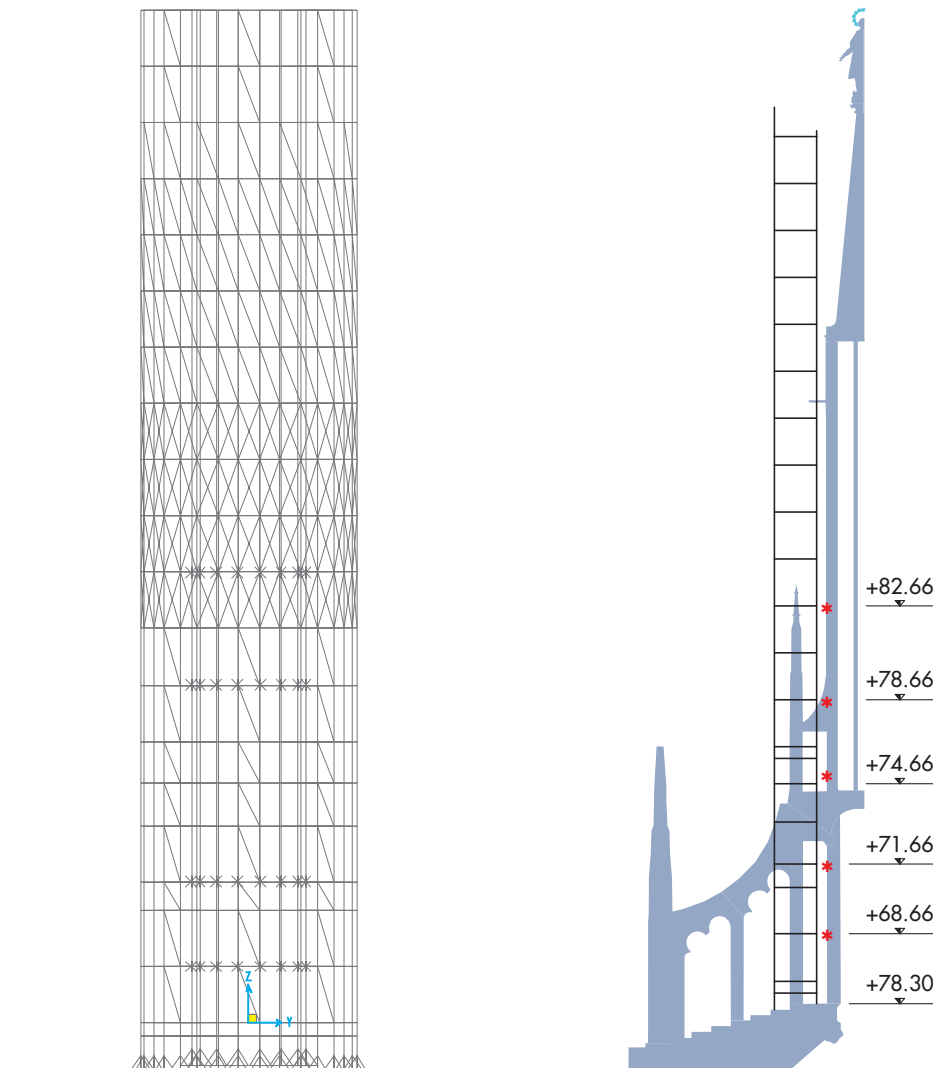


Figura 2  
Prospetto e sezione del ponteggio metallico.

a)



b)



c)



Figura 3  
a) e b) Vista d'insieme del  
Duomo di Milano con  
ponteggio metallico che  
circonda la Gran Guglia;  
c) Dettaglio del ponteggio.

primi modi di vibrare della struttura preesistente e fornire una stima degli smorzamenti associati. Non essendo praticabile la strada dell'eccitazione forzata, date le frequenze in gioco e gli spazi disponibili, si è deciso di utilizzare tecniche di analisi modale operazionale basate sulla sola misura della risposta della struttura per l'identificazione dei modi di vibrare (Farrar, 1997).

Le grandezze fisiche necessarie a tale tipo di analisi sono le accelerazioni a cui è sottoposta la struttura, dovute a forzanti ambientali quali traffico, vento, persone in movimento. Sono quindi stati impiegati accelerometri piezoelettrici ad alta sensibilità per impiego civile, che consentono la registrazione di minime variazioni di accelerazione con ottime prestazioni in termini di rumore di fondo (ottima qualità del segnale anche per accelerazioni molto basse) e con banda passante la cui frequenza minima è estesa verso il basso nell'intorno degli 0.1 Hz. La Tabella 2 riporta le caratteristiche metrologiche dei sensori impiegati.

Si è allestita una catena di misura distribuita su quattro livelli, come riportato in Figura 4. Le posizioni sono state scelte allo scopo di riconoscere con completezza il maggior numero di modi possibili, ma evitando nel contempo ridondanze eccessive dei punti di misura. La catena di misura è stata completata da un anemometro a coppe posto in corrispondenza del livello più alto ed in una zona il più possibile libera da interferenze per la misura della velocità del vento, con la relativa bandierina segnavento.

Il primo livello di misura è stato disposto in corrispondenza del terrazzino più alto della guglia. In tale posizione sono stati scelti due punti di misura biassiali (direzione x e y), come riportato in Figura 5, a questo livello è stato installato l'anemometro. Il secondo livello di misura è stato posizionato lungo la scala interna della guglia, a metà strada tra il livello 1 e il livello 3. In questo caso si è scelto un solo punto di misura biassiale, orientato come mostrato in Figura 5. Il terzo livello di misura è stato invece collocato in corrispondenza del terrazzo più basso. Come per il livello 1, si sono scelti due punti di misura biassiali disposti secondo quanto mostrato in Figura 5. L'ultimo livello di misura è stato infine collocato in corrispondenza del muro portante alla base della cupola del Duomo. Anche in questo caso si è scelto un solo punto di misura

biassiale. La disposizione scelta è stata ritenuta idonea per la descrizione dei primi modi flessionali e torsionali della guglia. La Figura 6 e la Figura 7 mostrano i punti di misura installati in corrispondenza del livello 1 e 2.

Le prove sono state eseguite nelle giornate del 1 e 2 giugno 2010. Fortunatamente si è trattato di due giornate decisamente ventose, con medie sui 10 minuti spesso intorno ai 20 m/s: questo ha permesso di introdurre nella struttura una buona quantità di energia, utile ad eccitare chiaramente i primi modi di vibrare della guglia. Le storie temporali relative alle acquisizioni ambientali, che coprono 2 giorni di acquisizione continua delle vibrazioni della guglia principale, sono state esaminate e da esse è stata estratta una porzione di circa 24 h di segnale priva di segnali di natura impulsiva (fenomeni meccanici dovuti all'attività di cantiere facilmente individuabili ed eliminabili) ed altri problemi (saturazioni elettriche, dovute anch'esse alle attività di cantiere strettamente connesse con l'alimentazione elettrica del sistema di misura) che potessero influenzare negativamente l'analisi. I dati relativi alla finestra considerata sono stati analizzati al fine di stimare le densità di potenza spettrale (PSD) per ognuno dei punti di misura. Un esempio di PSD è riportata in Figura 8, nel campo 0.1-10 Hz, mettendo in evidenza i picchi principali.

Come è possibile osservare sono 5 i picchi principali evidenziati nel grafico di Figura 8.

Per una migliore comprensione del comportamento dinamico di una struttura quale quella della Guglia, che presenta una sezione assial-simmetrica e prevede dunque modi di vibrare doppi (Tabella 3, Agnèni et al., 2009) è stata eseguita una Singular Value Decomposition (SVD) della matrice degli auto e cross spettri per valutare il livello di partecipazione dei vari modi alla creazione di ciascun picco in esame. I valori singolari ottenuti sono rappresentati in Figura 9 in funzione della frequenza.

La Figura 9 evidenzia gli stessi picchi messi in luce nell'analisi della PSD precedente mostrando chiaramente che i picchi evidenziati con una freccia rossa corrispondono a modi di vibrare doppi (simmetrici). Si ricorda che un modo di vibrare multiplo è evidenziato dal fatto che 2 o più valori singolari si presentino comparabili in corrispondenza di un picco.

I dati misurati sono stati analizzati secondo 2 differenti algoritmi per l'estrazione dei parame-

Tabella 2 - Caratteristiche metrologiche dei sensori

Sensore	Fondo Scala	Banda Passante	Sensibilità	Rumore di fondo
Accelerometro piezo PCB 393B12	0.5 g	0.1 Hz – 500 Hz	10 V/g	3.1 ( $\mu\text{m}/\text{sec}^2$ )/ $\sqrt{\text{Hz}}$



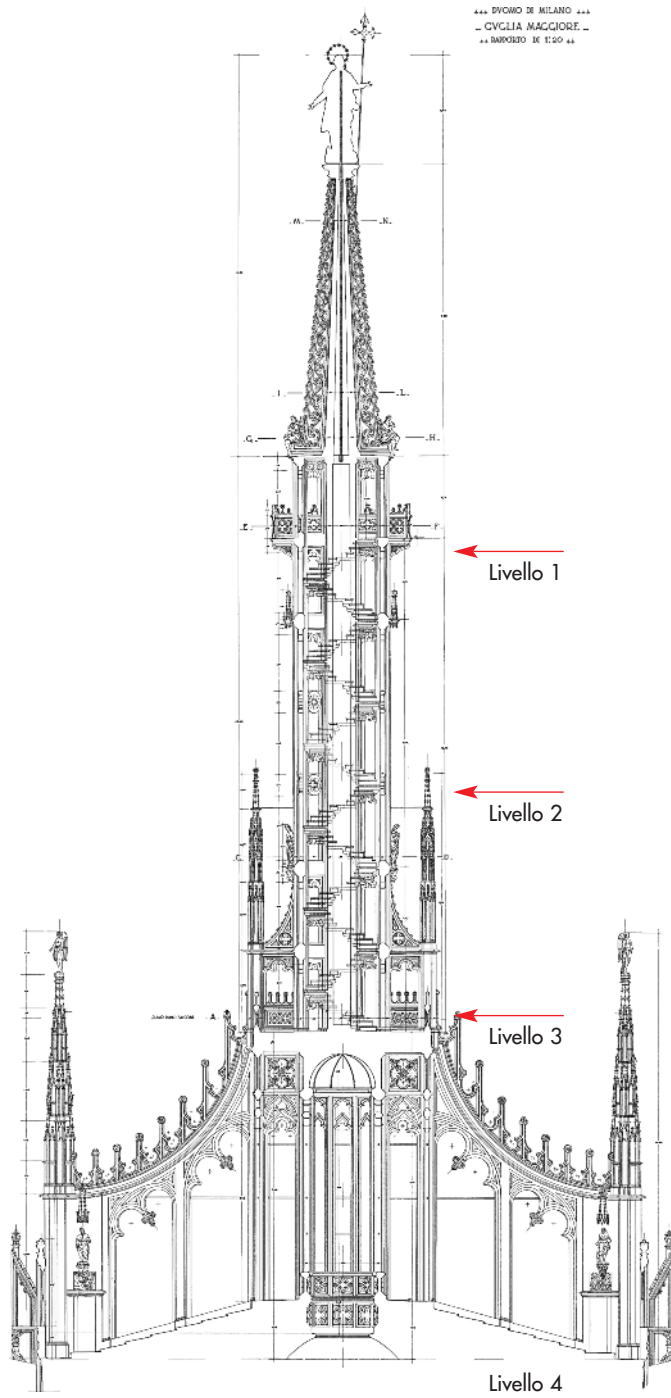


Figura 4  
Livelli di misura sulla guglia  
maggiore del Duomo.

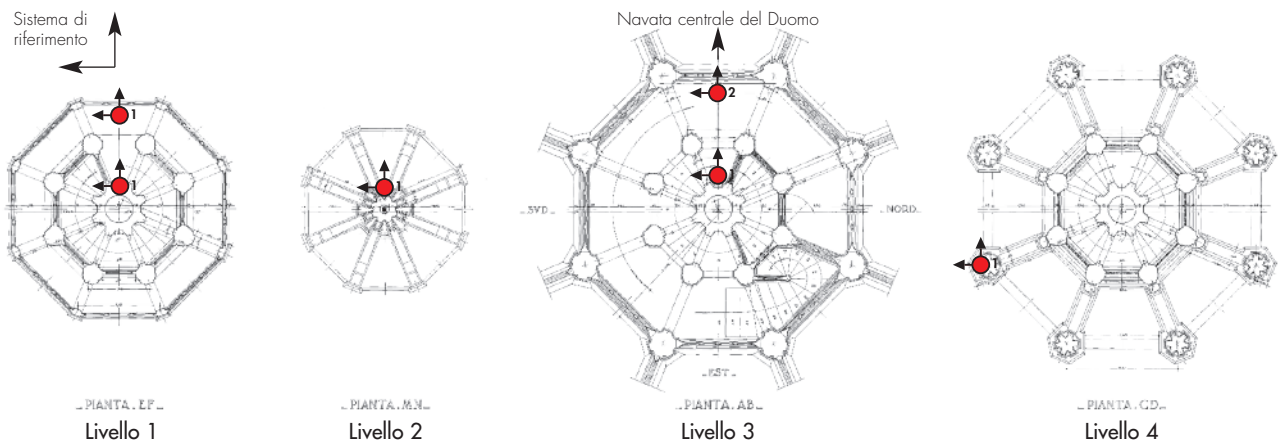


Figura 5  
Punti di misura.

Figura 6  
Sensori in corrispondenza  
del livello 1.

Figura 7  
Sensori in corrispondenza  
del livello 2.



Figura 8  
PSD dei segnali calcolata  
tra 0-10 Hz.

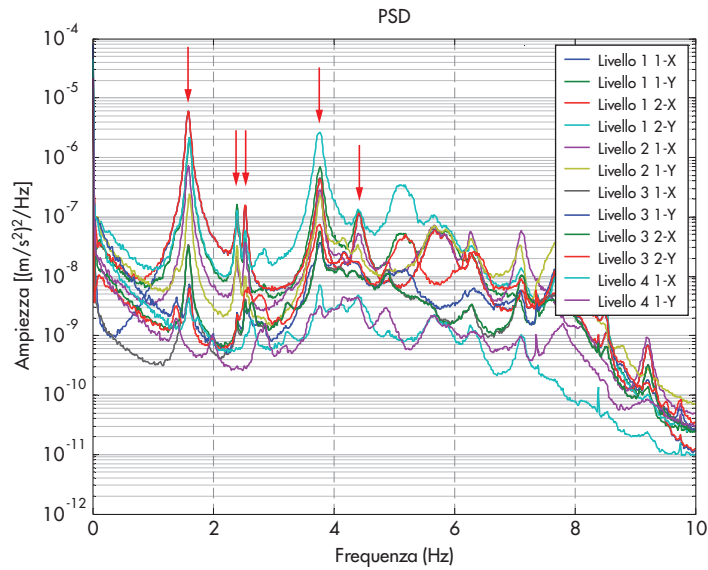
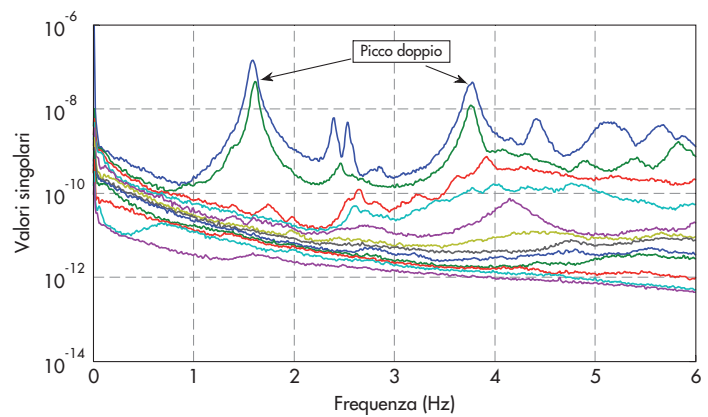


Figura 9  
Valori singolari in funzione  
della Frequenza.



tri modali, secondo quanto descritto in Agnigni et al., 2009 e Peeters et al., 2005, i risultati ottenuti sono riassunti in Tabella 3. Analizzando in dettaglio quanto identificato (Busca et al., 2011) si è potuto dimostrare che i modi 3 e 4 sono determinati dalla presenza del concio di ponteggio già installato al momento delle misure e che non sono di pertinenza della Guglia Maggiore. L'analisi delle deformate ha

messo in evidenza come i modi 1 e 2 corrispondano ad una flessione della Guglia Maggiore (1° modo flessionale a mensola incastrata) secondo i due assi ortogonali. I modi 5 e 6 rappresentano una torsione mista a flessione della guglia. Per i modi 7 e 8 risulta più incerta l'identificazione della deformata a causa di un rapporto segnale rumore meno favorevole.

Tabella 3 - Frequenze identificate sperimentalmente

Modi identificati		
Modo	Frequenze [Hz]	Smorzamento %
1	1.59	2.0
2	1.61	1.5
3	2.40	0.8
4	2.53	0.7
5	3.77	1.0
6	3.77	1.2
7	4.41	1.2
8	5.13	0.6

### 3. Modello di calcolo

#### 3.1 Geometria e materiali

La valutazione degli effetti dell'intervento sulla guglia e sul tiburio è stata condotta mediante lo sviluppo di un modello tridimensionale agli elementi finiti. La complessa geometria dell'opera ha richiesto il ricorso ad una modellazione con elementi tridimensionali, benché per la idealizzazione numerica delle vele che compongono la cupola anche una modellazione con elementi bidimensionali sarebbe stata accettabile dato il ridotto rapporto fra spessore e raggio di curvatura ( $s/R < 1/20$ ) che le classifica, secondo la classica letteratura nel campo della modellazione dei gusci, come superfici sottili. Tuttavia la scelta

di una modellazione con elementi tridimensionali "brick" comporta numerosi vantaggi tra i quali una formulazione numerica molto stabile in quanto basata direttamente sulle leggi della meccanica del continuo, la possibilità di riprodurre fedelmente la geometria degli elementi senza la necessità della definizione di linee o superfici d'asse, la parziale riduzione del numero di gradi di libertà (solo tre per nodo) e la maggiore versatilità nella definizione di legami costitutivi in campo non lineare rispetto agli elementi "shell". La realizzazione del modello ad elementi finiti ha richiesto una prima fase di modellazione tridimensionale CAD, condotta a partire dalla restituzione dei disegni architettonici in possesso (Figura 10) e

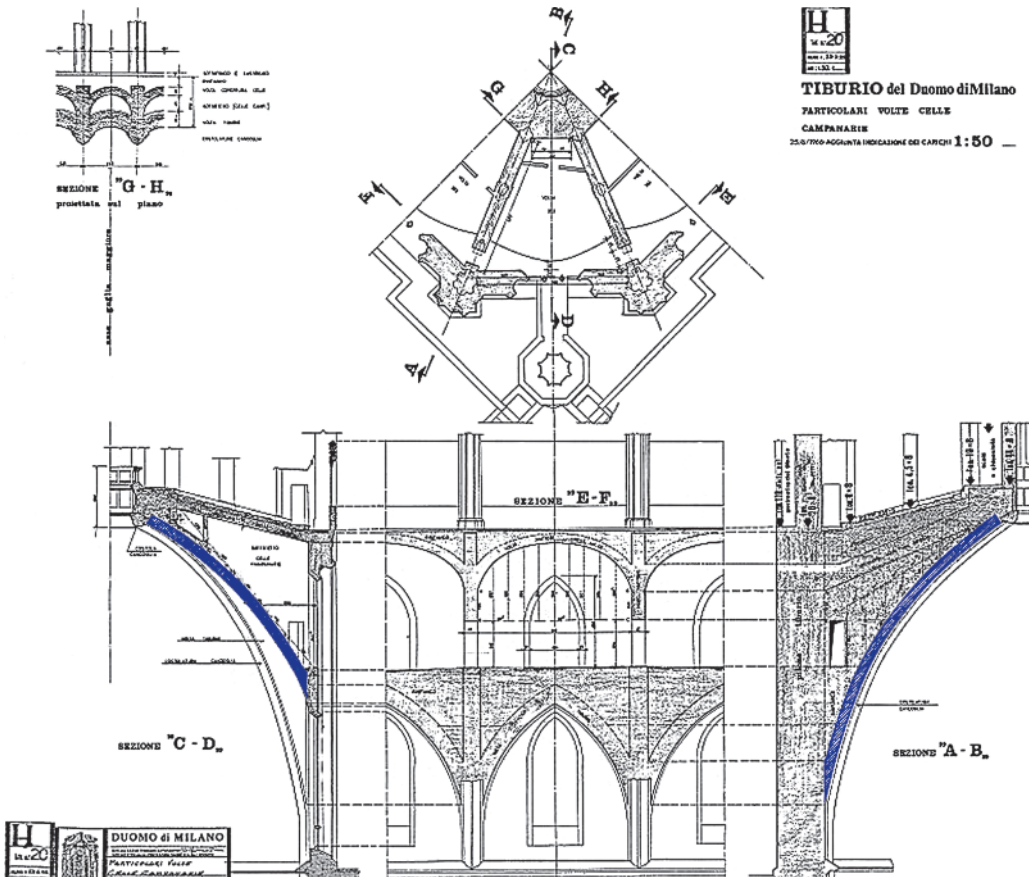


Figura 10 Valutazione delle curvature nel piano verticale a partire dai disegni architettonici (cortesia della Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano).

dalla sovrapposizione dei diversi dati a disposizione (prospetti, sezioni e proiezioni) così da massimizzare l'accuratezza del modello semplificato della complessa geometria considerata.

La presenza di geometrie a diverse curvature e in alcuni casi particolarmente spigolose, come in corrispondenza della guglia e alla base delle volte, ha motivato l'impiego di elementi tetraedrici per la realizzazione della mesh del modello numerico, i quali risultano più versatili rispetto ai più classici e regolari elementi esaedrici.

Durante la fase di definizione della mesh tridi-

mensionale (Figura 11 e Figura 12), la dimensione minima per gli elementi è stata definita così da garantire almeno due elementi e cinque punti di Gauss nello spessore delle volte in muratura, in particolare in vista di un'estensione delle analisi in campo non lineare. Si è inoltre riposta particolare attenzione alla riduzione della distorsione dello Jacobiano della mesh sia a livello locale che globale, in modo da garantire una sufficiente regolarità e stabilità del modello numerico.

Le catene metalliche presenti lungo il perimetro del tiburio, su due livelli, sono state modellate

Figura 11  
Dettaglio del modello  
FEM - guglia.

Figura 12  
Sezione del modello FEM.

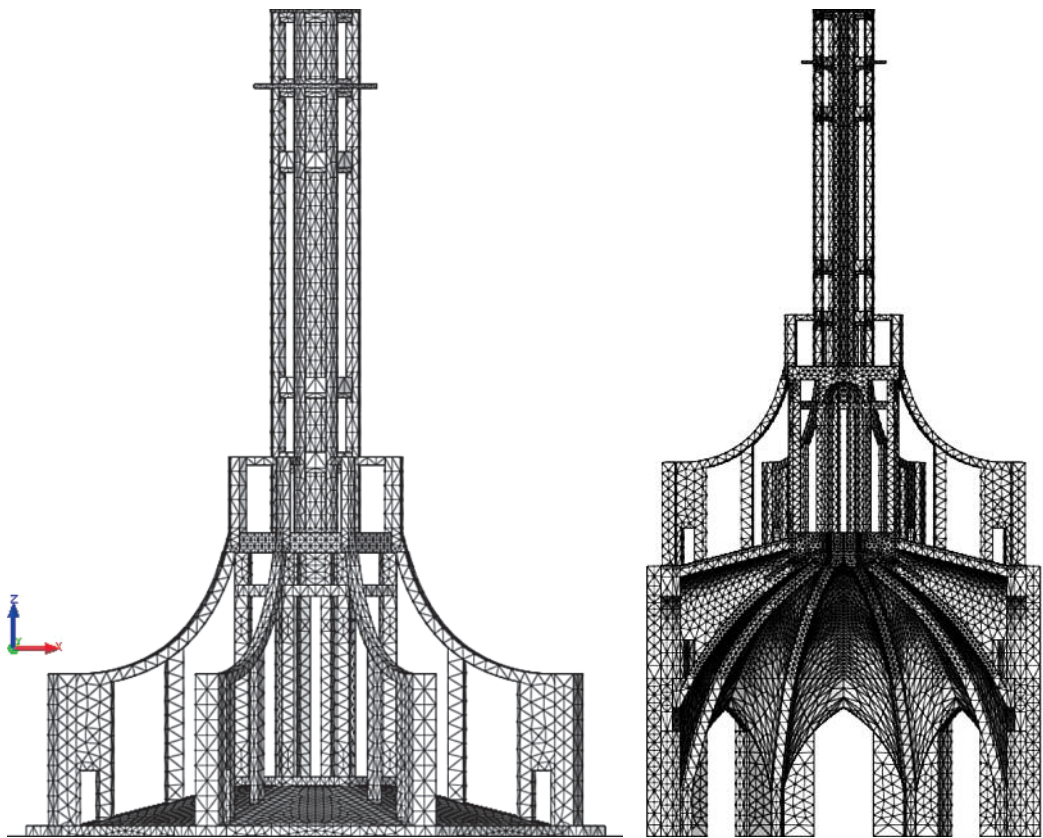
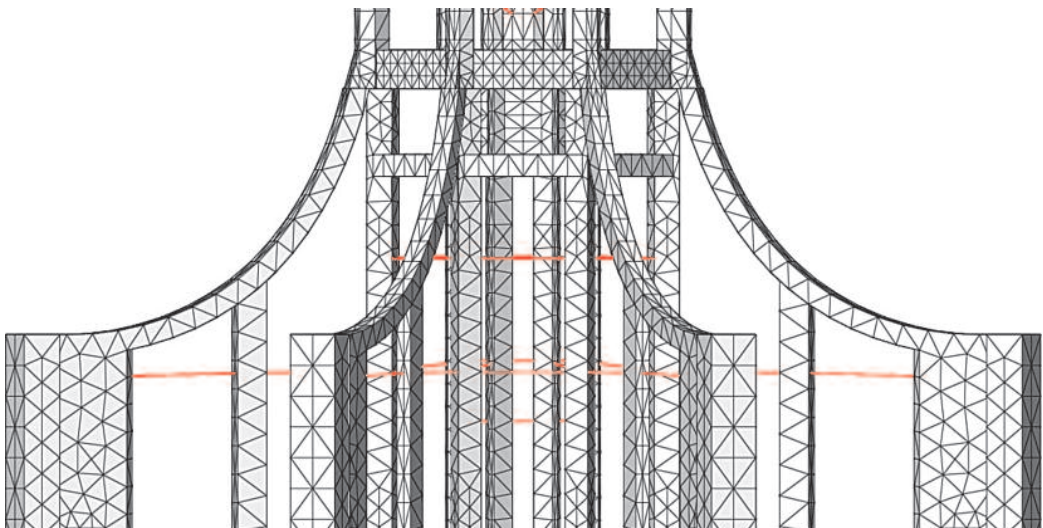


Figura 13  
Modellazione delle catene  
mediante elementi "truss"  
(in rosso).



mediante elementi "truss" in acciaio, analogamente si è operato per gli elementi che collegano le pareti portanti con la sommità dei finestroni presenti sulle pareti del tiburio. Sono state, inoltre, modellate tutte le catene osservate all'interno della guglia nel corso dei sopralluoghi effettuati (Figura 13). La presenza del rinforzo elicoidale intorno alla colonna cava centrale della guglia, che si sviluppa dalla quota del primo terrazzo fino alla cima, è stata considerata nel modello sotto forma di un incremento del 5% di rigidezza dell'elemento strutturale in quanto è stata valutata come più funzionale all'incremento di duttilità del materiale piuttosto che all'incremento della sua rigidezza.

Le scale marmoree presenti all'interno della guglia principale sono state idealizzate mediante degli elementi "link" rigidi che connettono la colonna cava centrale alle otto colonnine che la circondano.

### 3.2 Carichi

I carichi gravitazionali, relativi agli elementi strutturali rappresentati nel modello tridimensionale, sono stati valutati automaticamente dal codice agli elementi finiti a partire dai pesi unitari previsti per i singoli materiali (Tabella 1) e validati mediante calcoli semplificati.

I carichi gravitazionali relativi agli elementi non strutturali, quali i pennacchi e la cima della Gran Guglia sovrastata dalla celebre statua della "Madonnina" in rame dorato, sono stati valutati a partire dai disegni architettonici, adottando i relativi pesi strutturali. I carichi verticali così ottenuti sono stati assegnati alle aree interessate sotto forma di pressioni, così da evitare concentrazioni di sforzo non realistiche.

Oltre ai carichi gravitazionali, come carichi verticali sono stati considerati quelli indotti dalla presenza di neve, in quanto da un lato si vuole identificare lo stato tensionale a cui è risultata soggetta la struttura fino ad oggi, dall'altro si prevede la presenza del ponteggio per un periodo superiore all'anno. L'azione della neve sulla struttura è stata valutata in accordo alle prescrizioni del *DM 16 gennaio 1996* (DM 1996), il quale, per il sito di interesse, prevede un carico caratteristico di neve al suolo pari a 1.28 kN/m<sup>2</sup>. La pressione così valutata è stata applicata a tutte le superfici esposte presenti sulla copertura del tiburio e sulla guglia principale.

La definizione dei carichi indotti dall'azione del vento sulla struttura è stata condotta in accordo al DM 1996, considerando quindi un sistema di forze statiche equivalenti ai reali effetti dinamici dell'azione. La pressione cinetica di riferimento è stata determinata considerando un periodo di ritorno pari a 50 anni e una categoria di esposizione del sito  $V$ ,  $q_{ref} = 391$  N/m<sup>2</sup>. Per tenere

conto della natura dinamica del fenomeno, il metodo prevede la definizione di una serie di coefficienti correttivi per la pressione. Il coefficiente dinamico è stato assunto pari all'unità, quello di forma uguale a 1.2, secondo quanto previsto all'interno della *Circolare Ministeriale 4 luglio 1996 n.156*, per i corpi cilindrici o prismatici a sezione di poligono regolare di almeno otto lati. Il coefficiente di esposizione è stato valutato per diverse quote della struttura, come mostrato in Figura 14; in Tabella 4 si riportano i valori del coefficiente e le pressioni

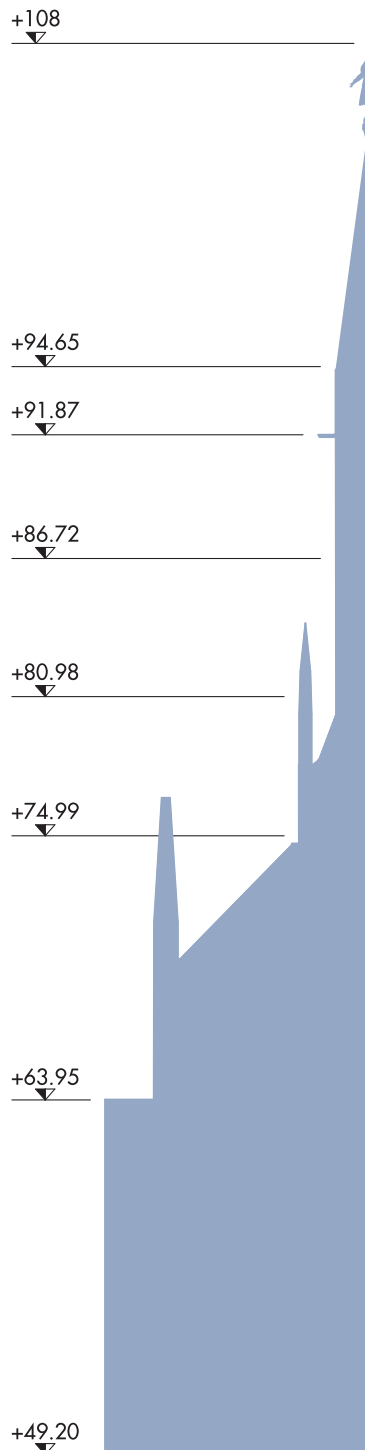


Figura 14  
Quote di valutazione del coefficiente di esposizione e delle pressioni relative.

Tabella 4 - Coefficienti di esposizione

z [m]	c <sub>e</sub>	P [N/m <sup>2</sup> ]
49.2	2.53	1187.7
63.95	2.75	1290.3
74.99	2.89	1354.3
80.98	2.95	1385.7
86.72	3.01	1413.8
91.87	3.06	1437.7
94.65	3.09	1450.2
108	3.21	1505.7

legate all'azione del vento da applicare alle diverse quote prese in considerazione, comprensive di tutti i coefficienti amplificativi.

Le pressioni relative all'azione del vento sono state applicate alle proiezioni delle superfici esposte della struttura, per la direzione considerata. L'effetto del vento agente sugli elementi architettonici non espressamente considerati nella geometria del modello, come la cima della guglia principale e i pennacchi ai livelli inferiori, è stato considerato applicando dei carichi distribuiti nelle zone di innesto di tali elementi.

Gli effetti indotti dal ponteggio sul tiburio e sulla Gran Guglia sono stati determinati senza la definizione di un modello complessivo che prevedesse l'interazione fra le due strutture, bensì considerando le reazioni vincolari delle analisi condotte per il progetto del ponteggio come carichi per la struttura esistente. Nell'analisi del ponteggio metallico condotta dalla società produttrice, sono state considerate le azioni derivanti dal peso proprio dell'opera, dai carichi accidentali e infine quelli indotti dall'azione del vento. Particolare attenzione ha richiesto la definizione delle superfici esposte e dei corretti coefficienti di forma da considerare nell'analisi del ponteggio, non solo per la realizzazione di un sistema strutturale sostanzialmente autoportante nei confronti delle azioni orizzontali ma anche per una corretta valutazione degli effetti indotti sulla struttura preesistente.

Le reazioni vincolari desunte dalla relazione di calcolo fornita dal produttore del ponteggio sono state applicate al modello agli elementi finiti sotto forma di carichi concentrati nei punti indicati dal progetto delle medesime opere provvisorie per l'ancoraggio alla struttura esistente.

### 3.3 Analisi modale

L'adeguatezza del modello numerico sviluppato è stata attestata mediante il confronto dei risultati di un'analisi modale con quelli ottenuti dall'identificazione dinamica. Questo confronto consente la validazione del modello agli elementi finiti, anche se è limitato al campo lineare, in particolare per quanto riguarda le proprietà meccaniche dei materiali ipotizzate.

L'impiego di un modello realizzato con elementi tridimensionali consente una fedele rappresentazione della reale distribuzione di massa nella struttura. Le masse relative agli elementi non strutturali sono state valutate a partire dai carichi precedentemente definiti e concentrate nelle zone del modello adiacenti alla loro reale collocazione.

In Tabella 5 sono riportati gli esiti dell'analisi condotta in termini di frequenze proprie e masse partecipanti ai singoli modi, come si nota la massa associata ai primi due modi traslazionali è una piccola percentuale della massa complessiva del modello, in quanto il primo modo interessa unicamente la parte superiore della Gran Guglia la cui massa è significativamente minore rispetto a

Tabella 5 - Risultati analisi modale e confronto con frequenze da identificazione dinamica previamente descritta

Modo	Frequenza [Hz]	M <sub>x</sub> [%]	M <sub>y</sub> [%]	Modo Identificato	Frequenza Ident. [Hz]
1	1.436	3.23	0	1	1.59
2	1.445	0	3.25	2	1.61
3	3.217	0	0	-	-
4	3.725	31.39	1.5	5	3.77
5	3.727	1.5	31.42	6	3.77
6	5.518	41.81	4.49	-	-
7	5.519	4.49	41.75	-	-
8	5.997	0	0	-	-

quella del resto della struttura analizzata. Il confronto delle deformate corrispondenti ai singoli modi (Figura 15), mostra come i modi 1 e 2 ottenuti dall'identificazione dinamica e corrispondenti alla flessione della guglia (Figura 16), siano in accordo con i primi due modi osservati con il modello numerico. Anche i modi 5 e 6 desunti dall'identificazione si trovano in accordo con i corrispondenti modi 4 e 5 del modello numerico. L'incerta identificazione dei modi 7 e 8 porta a non poter effettuare un confronto

diretto con la deformata da modello numerico. Il confronto tra risultati numerici e sperimentali è indicativo di una buona rispondenza del modello alla realtà. Le forme modali mostrano un buon accordo, per lo meno quelle identificate in modo robusto sperimentalmente, tra previsioni del modello e evidenza sperimentale; le discrepanze nei valori di frequenza (Tabella 5) sono giustificabili considerando la tipologia di materiale e la variabilità intrinseca delle sue caratteristiche.

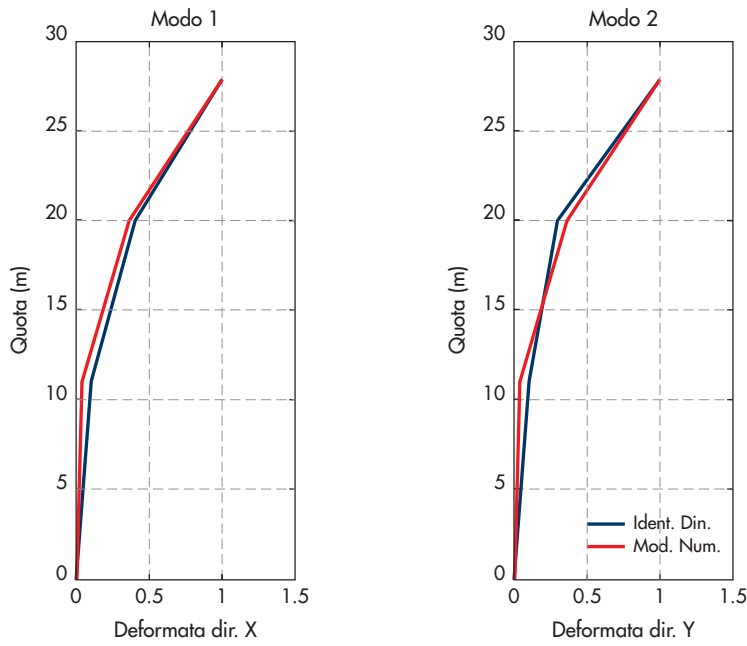


Figura 15  
Confronto dei modi di vibrare ottenuti dall'identificazione dinamica e con il modello numerico.

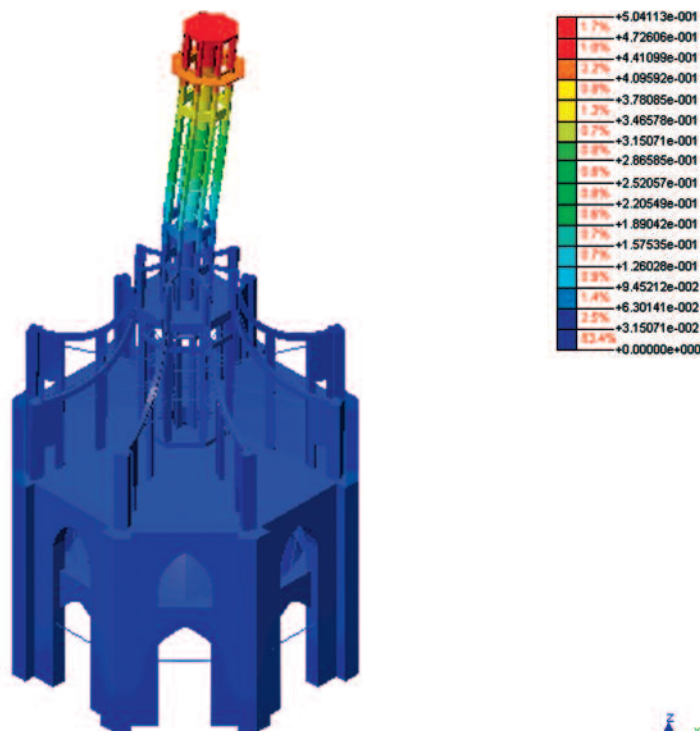


Figura 16  
Deformata modale, vista globale, Modo 1.



#### 4. Analisi lineari

##### 4.1 Valutazione dello stato tensionale

L'analisi della porzione di struttura modellata agli elementi finiti è stata condotta in una prima fase assumendo un comportamento lineare elastico e isotropo dei materiali, le cui proprietà sono state definite in accordo alla Tabella 1. Sono state condotte quattro differenti analisi in funzione dei carichi agenti considerati:

**Caso 1:** carichi gravitazionali della struttura valutati a partire dai pesi specifici dei materiali;

**Caso 2:** carichi gravitazionali della struttura, carichi gravitazionali e permanenti del ponteggio e carichi da neve;

**Caso 3:** carichi gravitazionali della struttura e azione esercitata dal vento sulla stessa;

**Caso 4:** carichi gravitazionali della struttura, carichi gravitazionali e permanenti del ponteggio e azione esercitata dal vento sulla struttura e sul ponteggio.

Lo scopo è quello di comparare i risultati otte-

nuti, in termini di stato tensionale, per la struttura soggetta alle sole azioni gravitazionali con quelli comprendenti anche quelle indotte dal vento in presenza ed in assenza del ponteggio. Data la carenza di informazioni riguardo alla reale resistenza degli elementi in muratura, dovuta all'assenza di prove sperimentali sul materiale deteriorato dagli agenti atmosferici, è possibile valutare la fattibilità dell'intervento determinando lo scarto fra lo stato tensionale che la struttura si è trovata a sopportare sino ad oggi senza particolari inconvenienti, quindi compatibile con la sua resistenza, e i livelli di sforzo a cui sarebbe soggetta per effetto della presenza del ponteggio.

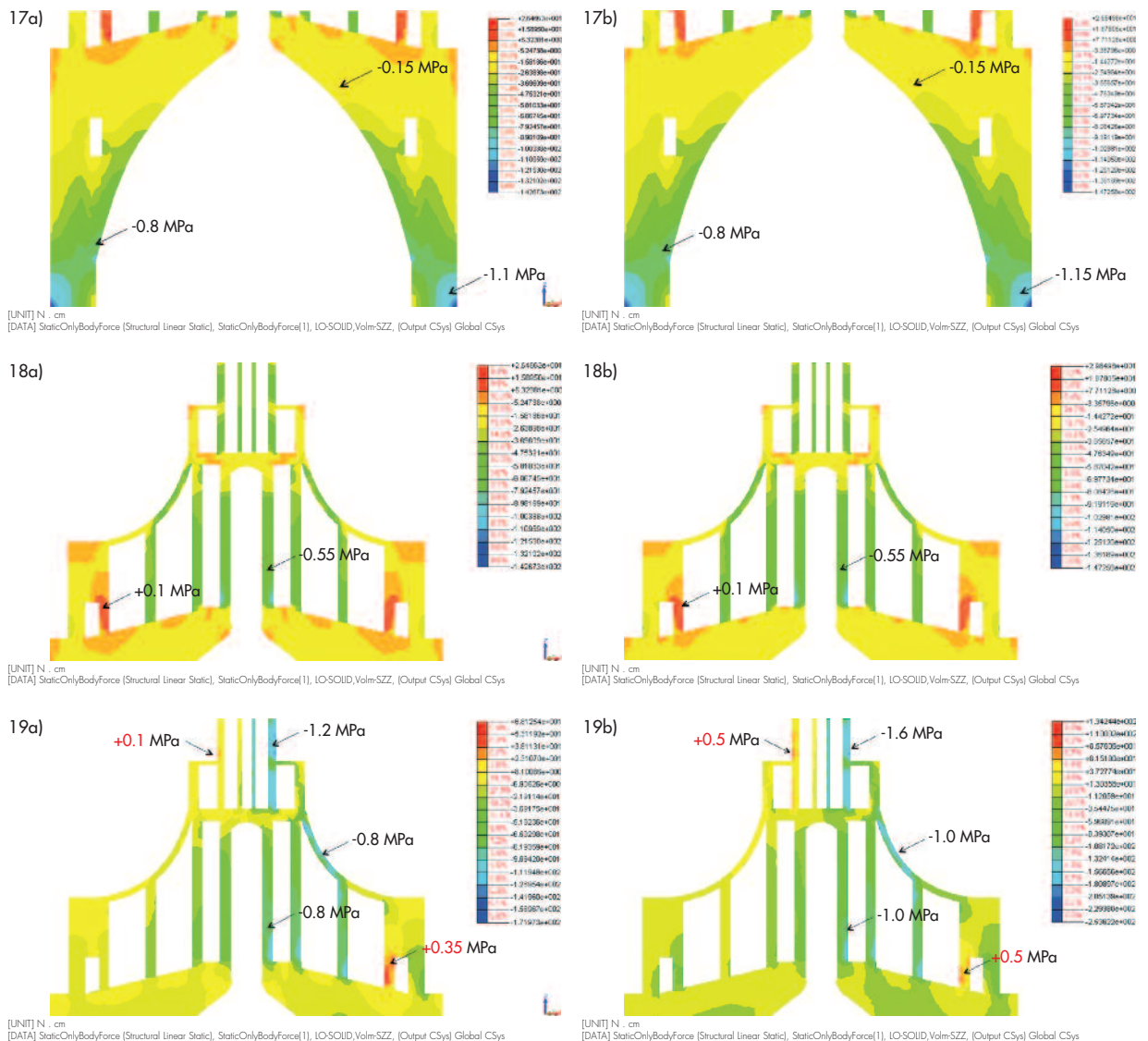
Nella configurazione di ponteggio analizzata, questo poggia alla base sulla parte centrale della copertura del tiburio, in prossimità dell'anello in muratura ed è ancorato orizzontalmente su più livelli alla guglia (vedi Figura 2).

Le prime due analisi (Caso 1 e Caso 2) si proponevano di determinare l'effetto della presenza

Figura 17  
Confronto dell'andamento degli sforzi in direzione verticale,  $\sigma_z$  [N/cm<sup>2</sup>], all'interno del tiburio fra Caso 1 a sinistra e Caso 2 a destra.

Figura 18  
Confronto dell'andamento degli sforzi in direzione verticale,  $\sigma_z$  [N/cm<sup>2</sup>], alla base della guglia fra Caso 1 a sinistra e Caso 2 a destra.

Figura 19  
Confronto dell'andamento degli sforzi in direzione verticale,  $\sigma_z$  [N/cm<sup>2</sup>], alla base della guglia fra Caso 3 a sinistra e Caso 4 a





del ponteggio in termini di incremento di carichi verticali (considerando anche una quota di carico da neve); il confronto dei risultati ha evidenziato come lo stato di sforzo non aumenti in misura preoccupante, in particolare nelle costolature interne alla cupola e nei piloni del tiburio (Figura 17). Al contrario i risultati ottenuti per il Caso 3 e il Caso 4, hanno mostrato come gli effetti del vento siano sensibilmente diversi in presenza e in assenza del ponteggio, soprattutto con riferimento allo stato tensionale all'interno della guglia. All'altezza del primo terrazzo della guglia, si riscontrano incrementi degli sforzi verticali superiori al 50% sui valori massimi di compressione e la presenza di sollecitazioni di trazione abbastanza significative (Figura 19). Presumibilmente gli sforzi di trazione osservati nell'ultima analisi non possono essere assorbiti dalla muratura lapidea deteriorata della guglia, pertanto per una più accurata valutazione dello stato tensionale si è ritenuto necessario lo sviluppo di analisi non lineari.

#### 4.2 Analisi di sensitività

Le ipotesi effettuate riguardo alle caratteristiche meccaniche dei materiali, non essendo suffragate da valori sperimentali, rappresentano la maggior criticità del modello numerico sviluppato. È stata pertanto eseguita un'analisi di sensitività

allo scopo di verificare la dipendenza dello stato di sforzo rispetto alle ipotesi riguardo ai moduli elastici dei materiali. I valori del modulo elastico assunto per i diversi materiali sono stati fatti variare del 20% in eccesso e in difetto (Tabella 6) e i risultati ottenuti in termini di sforzi dalle analisi elastiche lineari eseguite per il solo Caso 4 (cupola con ponteggio sollecitato dal vento) sono stati comparati.

Le variazioni tensionali sono state valutate nelle zone ritenute più significative della struttura. Alla base del tiburio sono stati osservati incrementi e riduzioni degli sforzi verticali sempre nell'ordine del 5%. Le variazioni sono risultate più significative all'altezza della guglia maggiore, alla base di questa, infatti, gli sforzi verticali hanno presentato variazioni nell'ordine del 10%. I cambiamenti dello stato di sollecitazione osservati nelle analisi eseguite variando il modulo elastico dei materiali, sono risultati sempre inferiori al 10%; pertanto una variazione del  $\pm 20\%$  delle caratteristiche dei materiali, comporta una variazione degli sforzi medi inferiore alla metà.

I risultati ottenuti dall'analisi di sensitività evidenziano come lo stato di sollecitazione della struttura dipenda in maggior misura dalla sua configurazione geometrica piuttosto che dalle caratteristiche dei suoi materiali, che rappresentano l'incognita maggiore della modellazione.

Tabella 6 - Proprietà meccaniche materiali per analisi di sensitività

Materiale	E [MPa]	E $-20\%$ [MPa]	E $+20\%$ [MPa]
Muratura in marmo di Candoglia	7200	5760	8640
Muratura in laterizio	4800	3840	5760
Riempimento	1000	800	1200
Acciaio catene	210000	210000	210000

#### 5. Analisi non lineari

Le analisi lineari condotte sul modello numerico sviluppato hanno evidenziato l'insorgere di non trascurabili sforzi di trazione a livello della base della guglia nel caso in cui sia prevista la presenza del ponteggio soggetto all'azione del vento. La muratura in pietra di cui è composta la guglia, tuttavia, non pare in grado di assorbire tali sforzi di trazione, quindi una corretta valutazione dello stato tensionale richiede il passaggio all'analisi in campo non lineare.

Il comportamento della muratura in marmo di Candoglia è stato idealizzato secondo un legame non resistente a trazione ("no tension") in modo da valutare l'incremento degli sforzi di compressione necessario a garantire le condizioni di equilibrio. Non sono state riscontrate variazioni significative dello stato di sforzo per quanto riguarda gli elementi componenti il tiburio e le vele della

cupola. Gli scarti più significativi si sono evidenziati a livello della guglia, dove l'impossibilità di assorbire sforzi di trazione da parte degli elementi sopravento ha determinato un incremento delle compressioni in quelli sottovento; il massimo sforzo di compressione osservato (Figura 20) all'altezza della guglia è passato da un valore di 1.6 MPa corrispondente all'analisi lineare per il caso 4 ad uno pari a 2.5 MPa nell'ipotesi di comportamento non lineare della muratura.

Nonostante il massimo valore osservato non risulti particolarmente elevato per una muratura in marmo come quella in esame, l'incremento rispetto alla situazione preesistente risulta considerevole (più del 100%) e non è da ritenersi compatibile con le capacità resistenti degli elementi come stabilite a partire dalla loro precedente storia tensionale. È tuttavia da riscontrare come il significativo incremento sia localizzato

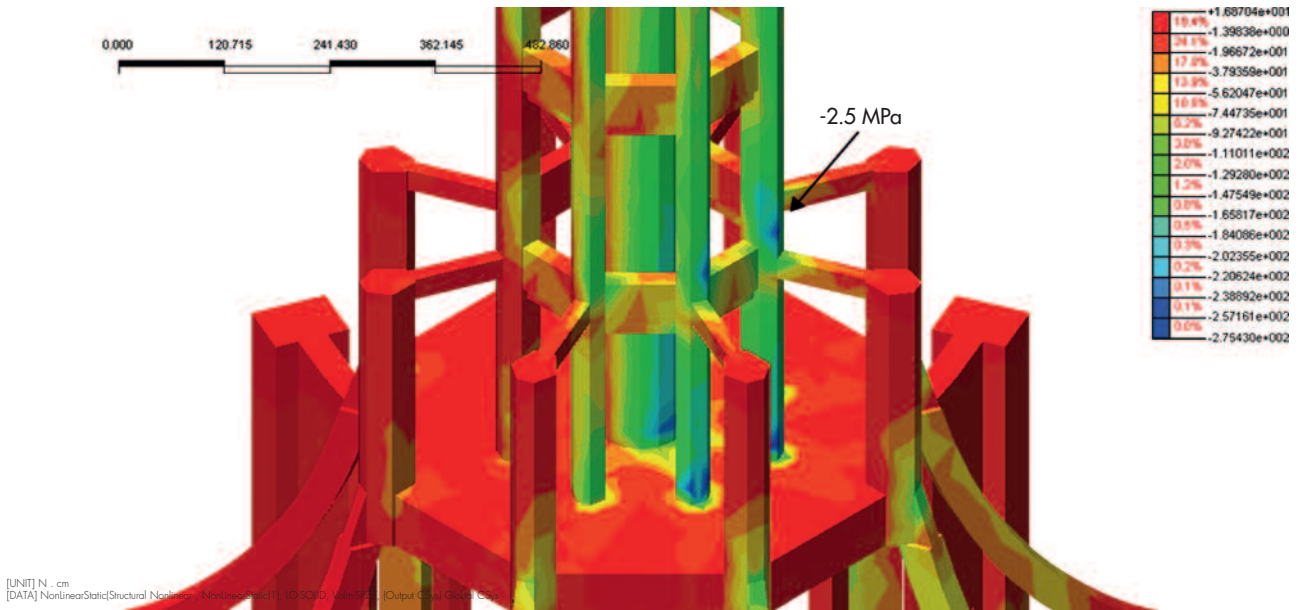


Figura 20  
Andamento degli sforzi in  
direzione verticale,  $\sigma_z$   
[N/cm<sup>2</sup>], alla base della  
guglia per il Caso 4,

all'altezza del primo terrazzo della guglia, al di sopra del quale sono posizionati due ordini di collegamenti diretti fra il ponteggio e la guglia; pertanto è da attribuire alle forze orizzontali trasmesse dal ponteggio metallico a cui gli elementi

sono per la prima volta sottoposti. Questa osservazione suggerisce lo sviluppo di una soluzione alternativa di collegamento del ponteggio alla struttura esistente al fine di evitare eccessivi incrementi dello stato di sforzo di quest'ultima.

## 6. Nuove soluzioni per il ponteggio

Le analisi lineari e non lineari condotte per valutare la variazione dello stato di sollecitazione nella struttura della guglia e del tiburio, hanno evidenziato come le connessioni orizzontali previste dal progetto del ponteggio metallico con la guglia fino a metà del suo sviluppo in altezza, determinino l'insorgere di sforzi al di sopra del primo terrazzo non accettabili se confrontati con lo stato di sollecitazione preesistente.

Al fine di ridurre tali sforzi risulta necessario eliminare le connessioni orizzontali previste alle quote maggiori lungo lo sviluppo in altezza della struttura, questa soluzione tuttavia comporta da un lato la necessità di irrigidire ulteriormente il ponteggio per ridurre la deformabilità laterale, dall'altro la definizione di nuovi punti di ancoraggio per trasmettere i carichi orizzontali derivanti dall'azione del vento.

Si è valutata la possibilità di trasferire parte delle azioni orizzontali mediante un sistema di tiranti e puntoni in tubo giunto direttamente in sommità dei piloni del tiburio, in corrispondenza delle pareti terminali degli archi rampanti. Si è prevista l'abolizione dei collegamenti orizzontali alle quote più alte fra guglia e ponteggio e l'inserimento di 8 puntoni ancorati a due livelli del ponteggio e alla base delle pareti in sommità delle colonne del tiburio (Figura 21). L'impiego di puntoni in tubo giunto consente di trasferire direttamente alla base della guglia le

forze laterali indotte dal vento, sotto forma di trazioni e compressioni quasi verticali a causa della loro significativa inclinazione. Tuttavia le trazioni possono essere facilmente assorbite alla base delle pareti terminali degli archi rampanti grazie agli sforzi verticali di compressione derivanti dai carichi gravitazionali della guglia.

La soluzione definitiva è stata riprogettata secondo il nuovo schema strutturale dalla società produttrice e una volta note le reazioni vincolari trasmesse alla guglia ed al tiburio è stato possibile condurre delle nuove analisi per valutare la variazione dello stato di sforzo rispetto alla soluzione precedentemente studiata.

Sono state eseguite due analisi non lineari che prevedevano la presenza dell'azione del vento: la prima relativa alla condizione prima dell'installazione del ponteggio (back-analysis), la seconda con la presenza del ponteggio nella sua ultima configurazione (Figura 22).

I confronti delle sollecitazioni osservate a livello della guglia nelle sezioni in cui si erano riscontrate la maggiori criticità nelle precedenti analisi, hanno evidenziato scarti quasi sempre inferiori al 20%, fatta eccezione ad alcune sezioni in cui si sono raggiunte differenze nell'ordine del 30%, tuttavia i valori massimi di sforzo nell'ordine degli 1.7 MPa sono stati assunti comunque accettabili per la muratura che ha garantito fino ad oggi livelli di resistenza analoghi in sezioni della guglia differenti da quelle in esame.

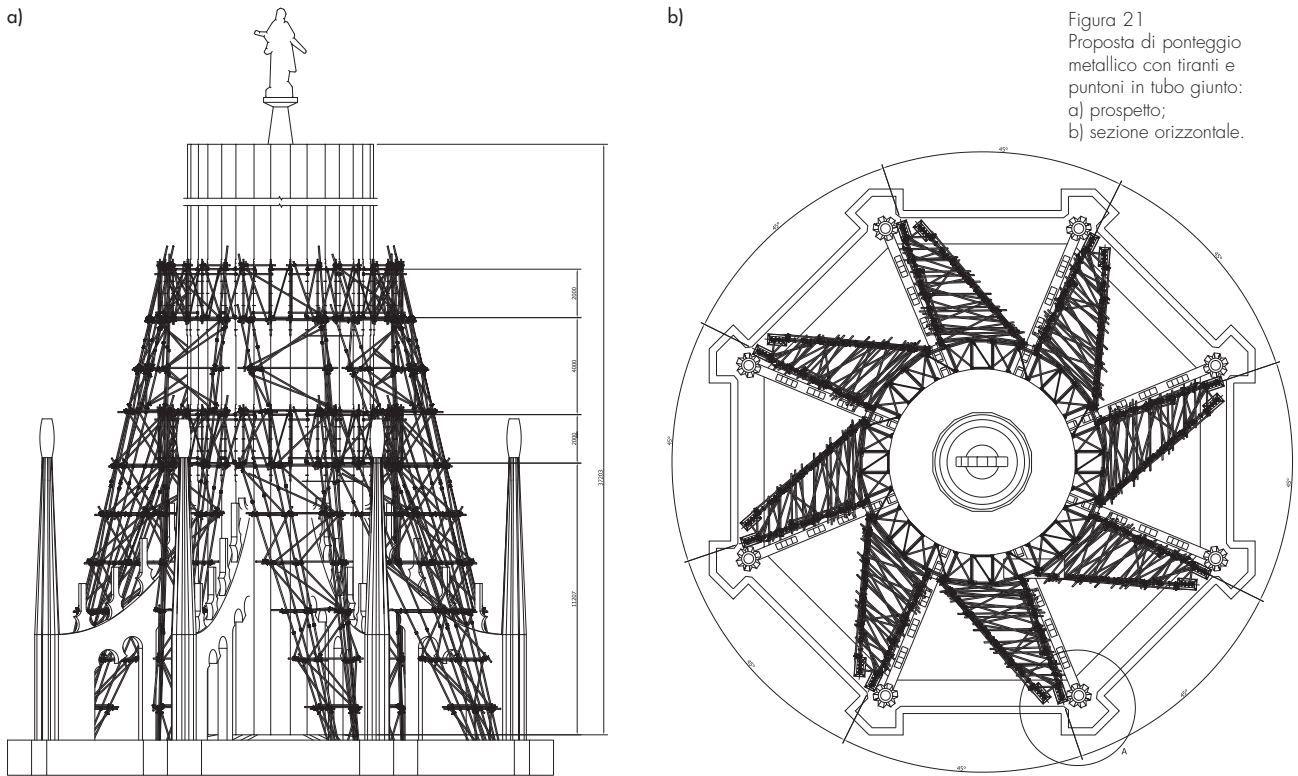


Figura 21  
Proposta di ponteggio metallico con tiranti e puntoni in tubo giunto:  
a) prospetto;  
b) sezione orizzontale.



Figura 22  
Andamento degli sforzi principali di compressione [N/cm<sup>2</sup>] all'interno del tiburio, Caso 4, analisi non lineare.

### 7. Conclusioni

La Gran Guglia del Duomo di Milano è risultata un'opera ardita di ingegneria sin dalla sua prima concezione. I necessari interventi di restauro predisposti dal consiglio della Veneranda Fabbrica del Duomo hanno richiesto lo sviluppo di uno studio numerico per la valutazione degli effetti che la costruzione di un ponteggio metallico avrebbero comportato sulla preesistente struttura.

Un modello di calcolo agli elementi finiti è stato sviluppato per lo studio del problema facendo ricorso ad elementi tridimensionali al fine di

riprodurre fedelmente la geometria e la distribuzione di materiale della struttura esistente. L'affidabilità del modello numerico è stata verificata confrontando i risultati di un'analisi modale con le evidenze sperimentali ottenute tramite l'identificazione dinamica delle proprietà di vibrazione della struttura esistente. Un approccio basato sul confronto fra lo stato tensionale che la struttura si è trovata a sopportare sino ad oggi con quello che verrebbe a sostenere per effetto della presenza del ponteggio metallico, ha consentito di superare le difficoltà riguardo alla determinazione delle resistenze dei materiali deteriorati

dal tempo e dall'inquinamento. Il modello numerico realizzato è stato utilizzato anche per lo sviluppo di analisi non lineari assumendo un comportamento non resistente a trazione per gli elementi in muratura.

Lo studio condotto ha consentito di identificare le criticità legate alla realizzazione dell'opera provvisoria e di valutare soluzioni alternative per la

sua realizzazione tali da ridurre l'impatto sul già delicato equilibrio globale della Gran Guglia.

La realizzazione della campagna di restauri consentirà di preservare la Guglia Maggiore del Duomo di Milano che rappresenta non solo una straordinaria opera di ingegneria e di architettura ma anche il più chiaro simbolo della cattedrale ambrosiana.

### Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano per il materiale fornito, essenziale per lo sviluppo del presente lavoro. Un ringraziamento particolare va al Diret-

tore della Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, l'Ing. Benigno Mörling Visconti Castiglione e al Prof. Leone Corradi Dell'Acqua, membro del Consiglio di Amministrazione della Veneranda Fabbrica.

### Bibliografia

- Agnagni A., et al. (2009) - Output-only analysis of structures with closely spaced poles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24 (2010) 1240-1249.
- Brivio E. (2003) - La guglia maggiore, trono della Vergine assunta, in *e il Duomo toccò il cielo*, a cura di Brivio E., Repishti F., pp. 143-163, Skira, Milano.
- Busca G., Cappellini A., Cigada A., Scaccabarozzi M., Vanali M. (2011) - Dynamic properties of the "Guglia Maggiore" of the "Duomo" in Milano via Operational Modal Analysis, EVACES 2011 - Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, October 2011, Varenna, Italy.
- Busca G., Cappellini A., Cigada A., Vanali M. (2011) - Operational modal Analysis of the "Guglia Maggiore" of the "Duomo" in Milano, IOMAC'11 - 4th International Operational Modal Analysis Conference, May 2011, Istanbul, Turkey.
- Corradi Dell'Acqua L., Calvi G.M. (2009) - La gran guglia come opera di ingegneria: un'opera ardita su un supporto difficile, relazione del convegno: La gran Guglia del Duomo di Milano e il caso Croce, ottobre 2009, Milano.
- Ewins D.J. (2000) - Modal testing: Theory and practice. Research Studies Press Ltd., Hertfordshire, U.K.
- Farrar C.R. (1997) - System identification from ambient vibration measurements on a bridge. *J. of Sound and Vibration*, 205(1), 1-18.
- Ferrari da Passano C. (2003) - La guglia maggiore, in *e il Duomo toccò il cielo*, a cura di Brivio E., Repishti F., pp. 133-142, Skira, Milano.
- Midas IT Co. Ltd (2009) - Midas FEA - Nonlinear and detail FE Analysis System For Civil Structures - Analysis and Algorithm.
- Mohanty P. and Rixen D.J. (2004) - Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation, *J. of Sound and Vibration*, 270 (1-2), 93-109.
- Nava A. (1845) - Relazione dei restauri intrapresi alla gran guglia del Duomo di Milano nell'anno 1844 e ultimate nella primavera corrente 1845, Valentini, Milano.
- Peeters B., De Roeck G. (2001) - One-year monitoring of the Z24-Bridge: environmental effects versus damage events. *Earthquake engineering structural dynamics*, 30(2), 149-171.
- Peeters B., Van der Auweraer H., Guillaume P., Leuridan J. (2004) - The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation? *IOS Press Shock and Vibration*, Publisher IOS Press, ISSN 1070-9622 (Print) 1875-9203 (Online), Issue Volume 11, Numbers 3-4/2004.
- Peeters B., Vanhullebeke F., Van der Auweraer H. (2005) - Operational PolyMAX for estimating the dynamic properties of a stadium structure during a football game. *Proceedings of XXIII international modal analysis conference*, Orlando, FL, USA.
- Stolfi G. (2003) - La costruzione della guglia maggiore e il consulto dei matematici, in *e il Duomo toccò il cielo*, a cura di Brivio E., Repishti F., pp. 165-176, Skira, Milano.