

Calcolo rapido delle frequenze proprie di una pila-mensola circolare

A fast calculation of natural frequencies for a circular cantilever Pier

Ampeglio Garini¹ ■

Sommario

Laddove la costruzione di un ponte preveda o per scelta architettonica o per motivi strutturali una soluzione a pile mensola circolari sorge il problema della valutazione delle frequenze proprie nella pila pensata come isolata. In questo articolo è esaminato il problema a partire da un evidente teorema corollario dell'analisi matematica in una variabile con riferimento alle frequenze proprie ben note per una mensola (incastro – estremo libero) nel caso di arco con angolo al centro di 90° e viene mostrato come procedere in casi in cui l'arco circolare risulti mozzato con angolo < 90°, come in effetti l'autore ha dovuto schematizzare in un caso applicativo per il progetto definitivo di una doppia passerella pedonale in Borgomanero (NO).

Parole chiave: Travi ad arco, ponti ad arco, frequenze naturali, metodi semplificati.

Abstract

Whereas a Bridge Construction, either as a architectonic choice or as a structural motive consider a solution with circular cantilever Piers, it's necessary to evaluate the natural frequencies of the single Pier. In this paper, starting from an evident theorem corollary of the mathematical analysis in one variable, we focus on a circular arch Pier with central arch equal to 90°, making reference to the well known case of linear cantilever beam (clamped - free end), and is also shown how to proceed in case the circular arch be cut, as indeed the Author had to sketch in a practical case for the definitive Project of a double Footbridge in Borgomanero (NO) Italy.

Keywords: Arch beams, arched bridges, natural frequencies, simplified methods.

1. Introduzione

Nell'ambito dell'analisi sismica di ponti, sia isotatici sia a travata continua, risulta necessario ai fini della risposta longitudinale valutare il periodo proprio delle pile pensate come isolate. Quando poi queste pile hanno forme particolari dettate dall'architettura o dall'ingegneria e cioè non di semplici pilastri verticali, sorge il problema del calcolo dinamico delle loro frequenze naturali. L'equazione differenziale che regge il moto trasversale di una trave rettilinea è come ben noto la seguente:

$$\partial^2 (EI \partial^2 u / \delta x^2) / \partial x^2 + \mu \partial^2 u / \partial t^2 = 0 \quad (1)$$

con le altrettanto ben note soluzioni, come indicato in Krall (1970).

Nel caso di travi circolari tale equazione deve essere opportunamente riformulata per tenere in conto dell'influenza della variazione delle azioni di taglio e di forza normale sul momento flettente e quindi sulla curvatura, rotazione e inflessione

relative, come indicato in Garini (2011).

In questo articolo, viene proposto un metodo semplificato che consiste nel simulare il comportamento della trave circolare con una corrispondente trave rettilinea equivalente in termini di lunghezza di inflessione caratteristica in considerazione dei ben noti formulari dell'inflessione di travi a mensola (vedi ad es. Baldacci, 1983).

2. Il Metodo

2.1 Un teorema - corollario dell'Analisi Matematica ad una variabile

Si può dimostrare che vale il seguente teorema - corollario:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) f'(x) dx / \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = [f(x_1) + f(x_2)] / 2 \quad (2)$$

Il che significa che la media pesata dalle sue derivate della funzione $f(x)$ in un certo intervallo è pari alla media dei valori che la funzione

¹ Consulting Engineer, Cicagna (GE) - ✉ adiego.garini@alice.it

stessa assume negli estremi dell'intervallo. Per esempio se si pesa la funzione $y = x^2$ nell'intervallo $(0, 1)$ dobbiamo trovare $1/2$; infatti:

$$\int_0^1 x^2 2x dx / \int_{x_1}^{x_2} 2x dx = x^4/2 \Big|_0^1 / x^2 \Big|_0^1 = (1/2)/1 = 1/2 \quad (3)$$

Analogamente se la pesiamo nell'intervallo $[-2, 1]$ abbiamo:

$$\int_{-2}^1 x^2 2x dx / \int_{x_1}^{x_2} 2x dx = x^4/2 \Big|_{-2}^1 / x^2 \Big|_{-2}^1 = (1/2 - 16/2) / (1 - 4) = (-15/2) / (-3) = 5/2 = (4+1)/2 \quad (4)$$

2.2 Applicazione del teorema corollario ad un arco con angolo al centro $\beta = 90^\circ$

Se applichiamo il teorema corollario sopra citato all'arco costituito da un quarto di cerchio abbiamo:

$$\int_0^R f(x) f'(x) dx / \int_0^R f'(x) dx = [f(0) + f(R)]/2 = (0+R)/2 = R/2 \quad (5)$$

In questo modo troviamo l'angolo al centro che (ricordiamo che si tratta di un'operazione di media pesata dalle derivate prime) ripartisce per i carichi orizzontali sismici (Figura 1) gli incrementi in y per una comparazione equivalente con una mensola rettilinea. L'angolo al centro corrispondente è quindi dato da: $\beta^* = \text{sen}^{-1}[(R/2)/R] = \text{sen}^{-1}(1/2) = 30^\circ$

Questa valutazione di primo tentativo, essendo

che essa vale tanto per i carichi verticali che per quelli orizzontali, data la simmetria del cerchio, risulta estremamente interessante in quanto in un arco a tutto sesto individua il cosiddetto "giunto alle reni" storicamente da sempre molto considerato nella scienza delle costruzioni come indicato in Giannelli (1924), che testualmente dice "la nozione di giunto alle reni o "giunto di rottura" è nata dall'osservazione che vòlte di deficiente grossezza manifestano la tendenza ad aprirsi verso l'estradosso nei giunti dove la curva delle pressioni più si avvicina all'intradosso, mentre in chiave tendono ad aprirsi verso l'intradosso perché ivi la curva delle pressioni si avvicina generalmente all'estradosso", il che ovviamente significa che in prossimità del giunto alle reni si dovrebbe attivare una sorta di incastro, responsabile delle variazioni di rigidità della travi ad arco e che quindi incide direttamente sulle frequenze proprie di cui stiamo trattando.

Volendo però valutare l'equivalenza del quarto di cerchio con una mensola rettilinea per il calcolo delle frequenze naturali si ha che per $\beta^* = 30^\circ$ $L_{eq} = (\pi/3)R$ e pertanto, essendo nel caso di mensola rettilinea:

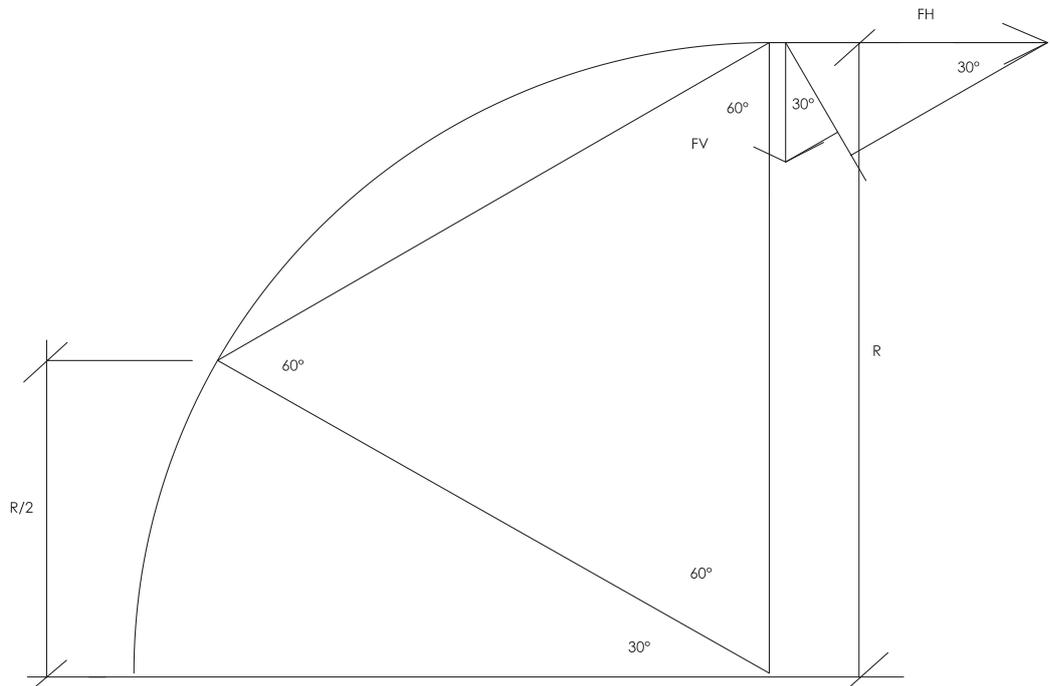
$$v = Pl^3/3EI \quad (6)$$

da compararsi con il corrispondente per trave a quarto di cerchio:

$$v = FR^3/2EI \quad (7)$$

dove però (Figura 1) $P = F \text{ sen}(30^\circ) = F/2$

Figura 1
Giunto alle Reni evidenziato dal calcolo di primo tentativo col teorema - corollario della media pesata di una curva con le sue derivate. FH e FV sono le forze sismiche rispettivamente orizzontale e verticale applicate in sommità.



l'equivalenza porta a:

$$(\pi/3)^3 (F/EI) R^3/3/2 = 0,191397 (F/EI) R^3 \neq 0.5 (F/EI) R^3 \quad (8)$$

Tale significativa diversità è in effetti dovuta al fatto che (Figura 2) la retta d'azione equivalente è ora inclinata e pertanto le medie pesate della funzione vanno fatte rispetto ai nuovi assi coordinati; considerando tale fatto abbiamo ora:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)f'(x) dx / \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = [f(x_1) + f(x_2)]/2 = [0 + R(1 - \sqrt{3/3})\sqrt{3/2}]/2 = R(1 - \sqrt{3/3})\sqrt{3/4} \quad (9)$$

Per cui, con semplici passaggi di geometria analitica, si deduce che l'angolo al centro corrispondente vale:

$$90^\circ - \arccos[X^*] = 90^\circ - \arccos [1/8 (1+\sqrt{3}) + 1/4(9-3/2\sqrt{3})^{1/2}] = 90^\circ - 13^\circ.07952 = 76^\circ.92048 \quad (10)$$

E nello stesso tempo, essendo la retta equivalente, inclinata dell'angolo:

$$\tan^{-1}[(R-Y^*)/X^*] = \tan^{-1}\{[R-R(1-X^{*2})^{1/2}]/X^*\} = 38^\circ.46024 \quad (11)$$

Per cui, ripetendo la procedura di equivalenza

questa volta si ha:

$$(76^\circ.92048/180^\circ\pi)^3/3 \text{ sen } (38^\circ.46024) = 0.50166 \approx 0.5 \quad (12)$$

Che risulta completamente soddisfacente e permette di calcolare la lunghezza equivalente: Pertanto la lunghezza equivalente per calcolare le frequenze naturali del quarto di cerchio per sisma orizzontale è pari a:

$$L_{eq} = (76^\circ.92048/180^\circ\pi) R \quad (15)$$

E quindi tali frequenze varranno, al solito:

$$\omega_n = (\lambda_n L_{eq})^2 (EI/\mu L_{eq}^4)^{1/2} \text{ con } (\lambda_1 L_{eq}) = 1.875; (\lambda_2 L_{eq}) = 4.694 \quad (16)$$

Viceversa la lunghezza equivalente per carichi verticali(cioè per sisma verticale) va tarata, in analogia alla (12), essendo la corrispondente inflessione del quarto di cerchio per carichi verticali, definita dalla seguente formula (17) con la formula (18) nel seguente modo:

$$v = \pi FR^3/4EI \quad (17)$$

$$(76^\circ.92048/180^\circ\pi) 3/3 \cos (38^\circ.46024) = 0.631569 \neq 0.7854 \quad (18)$$

Per cui è necessario iterare ulteriormente la pro-

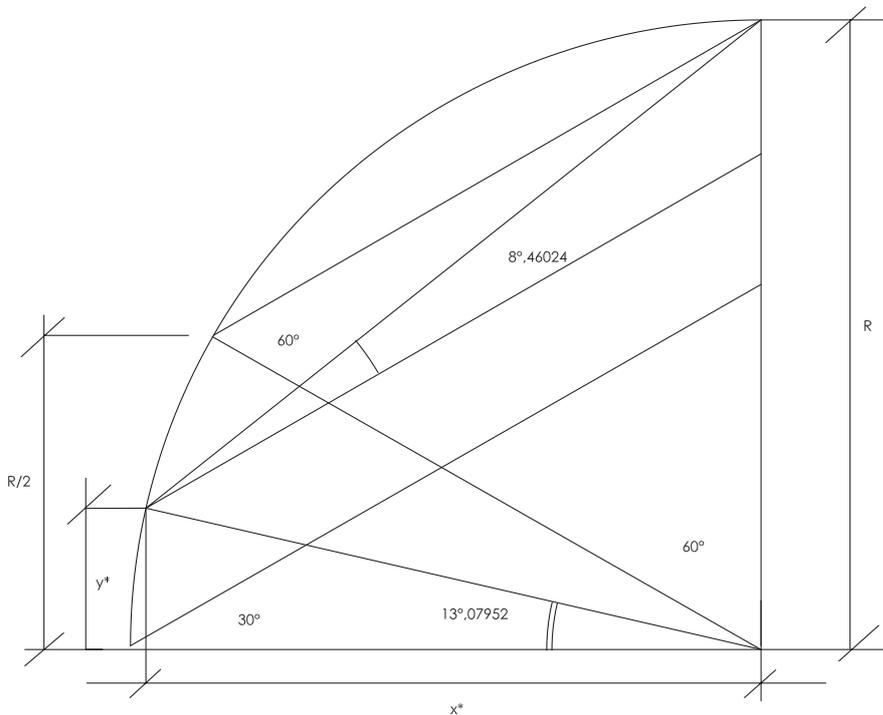


Figura 2
Secondo tentativo di applicazione del teorema – corollario della media pesata di una curva con le sue derivate. La lunghezza equivalente simula bene il comportamento a sisma orizzontale

cedura con un altro passo (Figura 3); in tal modo si ha:

$$(83^\circ.83186/180^\circ\pi)^{3/3} \cos(41^\circ.91593) = 0.776935 \approx 0.7854 \quad (19)$$

Pertanto la lunghezza equivalente per calcolare le frequenze naturali del quarto di cerchio per sisma verticale è pari a:

$$L_{eq} = (83^\circ.83186/180^\circ\pi)R \quad (20)$$

2.3 Confronto con valutazioni FEM

Ai fini della validazione della su descritta metodologia si è fatta un'analisi modale FEM, per mezzo del Software Sargon in allegato a Rugarli (2005), semplificando la trave circolare a tutto sesto con una sezione costante con $B = 1.8$ m corrispondente alla reale larghezza della passerella pedonale considerata nel progetto del ponte San Marco in Borgomanero e $H = 1$ m per esemplificare più intuitivamente la trave che in realtà è rastremata dapprima con cerchi di differenti raggi in intradosso ed estradosso e termina quindi con ulteriore rastremazione rettilinea al fine di rendere gradevole il suo inserimento affianco al ponte ad arco esistente. Il raggio considerato per il confronto è di 7.05 m corrispondente a quello di progetto che però viene realizzato su circa 70 gradi apertura e non su 90°

Si esplicita anche che tale soluzione è una invenzione architettonico - ingegneristica dell'autore, motivata dapprima dal rispetto della

luce idraulica esistente e contemporaneamente dall'equilibrio statico della travata continua a 3 campate che si era venuta configurando e pertanto difficilmente si hanno esempi reali di pile mensola di tal fatta, si da avere a disposizione prove in vera grandezza per il confronto.

L'analisi FEM di validazione è stata fatta considerando la trave a tutto sesto divisa in 43 nodi ciascuno distante dall'altro di 0.263669 m per una lunghezza totale d'arco pari a $\pi/2 * 7.05$ m = 11.074 m. I risultati delle frequenze proprie sono visibili in Tabella 1, ove risulta che i 2 primi modi significativi per le masse partecipanti Y e X danno rispettivamente $T = 0.211514$ s e $T = 0.202061$ s invece di $T = 0.190164$ s e $T = 0.1601$ s, valutati con la metodologia descritta, per sisma verticale e orizzontale rispettivamente. Tale differenza può apparire sensibile, ma occorre considerare, oltre alle ovvie imperfezioni di calcolo dei FEM dovute alle distribuzioni di masse sui nodi ed ai problemi citati circa le equazioni differenziali risolutive di riferimento, che le masse partecipanti indicate da Sargon sono piuttosto basse (% X $\approx 18\%$ e % Y $\approx 13\%$), mentre nella nostra valutazione si è impostato il confronto sul primo modo della trave a mensola rettilinea, e da un analogo confronto tra soluzione analitica e calcolo FEM sebbene semplificata con 11 nodi per una trave a mensola rettilinea risulta che la massa partecipante sul primo modo è del 65% ed in tal caso ovviamente si raggiunge una quasi totale somiglianza (0.0888 s analitico invece di 0.091 s FEM per la stessa sezione considerata per la trave circolare e supponendo $l = R = 7.05$ m).

Figura 3
Terzo tentativo di applicazione del teorema - corollario della media pesata di una curva con le sue derivate. La lunghezza equivalente simula bene il comportamento a sisma verticale.

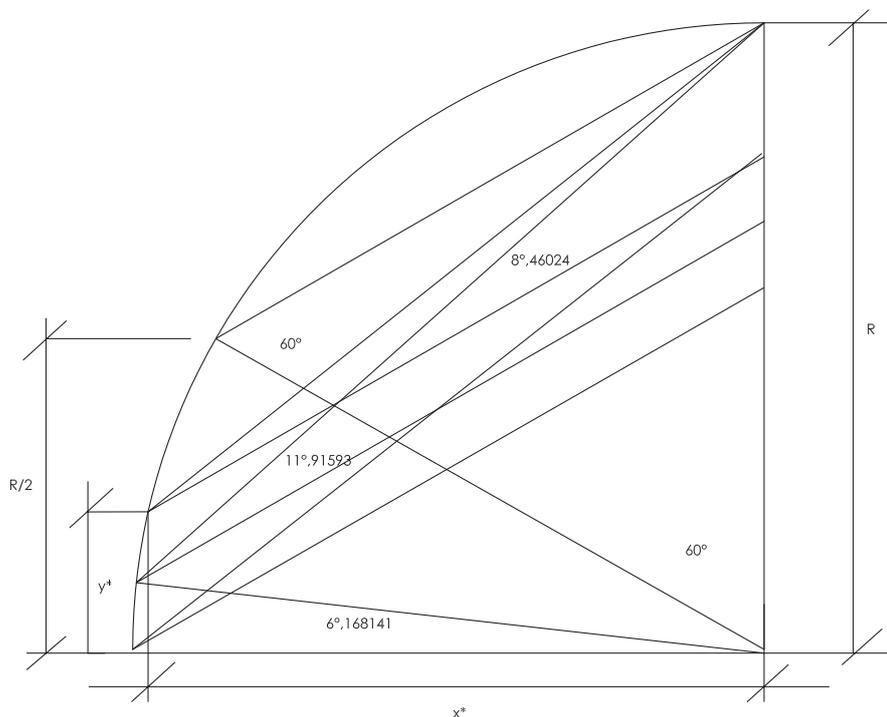


Tabella 1 - Frequenze proprie ricavate dall'analisi modale su di un modello FEM a 43 nodi di un arco a tutto sesto di raggio $R = 7.05$ m.t

Modo	Periodo T(s)	Massa X	Massa Y	Massa Z
1	T (sec) 0.211514	%X= 17.846	%Y= 13.159	%Z= 0.000
2	T (sec) 0.202061	%X= 17.954	%Y= 12.345	%Z= 0.000
3	T (sec) 0.141303	%X= 0.000	%Y= 0.000	%Z= 29.994
4	T (sec) 0.134154	%X= 0.000	%Y= 0.000	%Z= 29.327
5	T (sec) 0.045652	%X= 21.190	%Y= 2.418	%Z= 0.000
Totale	-	91.251	82.495	89.874

3. Un caso esemplificativo: la doppia passerella pedonale

3.1 Estensione al caso di angolo al centro $\beta < 90^\circ$

Nel caso in cui l'angolo al centro sia minore di 90° ovvero che il pilastro circolare mensola si presenti mozzato, come appunto il caso in esame nel progetto di Borgomanero ($\beta \approx 70^\circ$), basterà al solito applicare il teorema corollario solo fino al secondo estremo considerato, facendo una opportuna rotazione degli assi di riferimento, per la valutazione della funzione $y(x)$ esprimente la curva, in modo analogo a quanto mostrato per $\beta = 90^\circ$.

A maggiore chiarezza si evidenzia che l'angolo al centro $\beta < 90^\circ$ individua pur sempre un arco circolare, ma in questo caso vengono ovviamente meno le proprietà di simmetria geometrica (forza normale = 0) dell'appoggio che dicasi in chiave anche se di fatto non esiste un arco completo che scarica su 2 imposte, ma semplicemente un arco mensola.

3.2 Il ponte San Marco a Borgomanero

Il ponte pedonale di San Marco a Borgomanero il cui prospetto di valle del progetto definitivo è visibile in Figura 4 paesaggisticamente doveva inserirsi in affiancamento ad un ponte ad arco esistente del 1900 (Figura 5).

L'impalcato previsto in struttura mista acciaio è costituito da due travate accoppiate di 0.9 m di larghezza realizzate con una soletta in calcestruzzo di classe 32/40 di 24 cm e una trave in acciaio laminata a caldo del tipo S355 (Fe 510) di formato HE400A. Lo schema statico è quello di trave continua a 3 luci e 4 appoggi con due piccolissimi sbalzi con luci principali $l_1 = l_3 = 14$ m e $l_2 = 12$ m.

Sono state esaminate rispettivamente:

1. 24 combinazioni per lo studio dei massimi momenti flettenti positivi e negativi (4 per A1, A2, B1, B2, C, D);
2. 4 combinazioni per lo studio delle massime reazioni sugli appoggi centrali (4 per C);
3. 4 combinazioni per lo studio delle massime reazioni sugli appoggi laterali (4 per A1);
4. 24 combinazioni per lo studio dei massimi bi-momenti positivi e negativi (4 per A1, A2, B1, B2, C, D);

5. 4 combinazioni per lo studio dei massimi momenti torcenti d'ingobbamento reattivi sugli appoggi centrali (4 per C);

6. 4 combinazioni per lo studio dei massimi momenti torcenti d'ingobbamento reattivi sugli appoggi laterali (4 per A1);

La combinazione esaminata è quella SLU detta fondamentale che per Borgomanero risulta decisamente più gravosa di quella sismica, anche per la presenza di un carico concentrato da verificarsi come localizzato pari a 150 KN, il quale ovviamente agisce anche come carico mobile.

I pilastri a mensola circolari relativi erano previsti in c.a. rinforzato con fibre metalliche opportunamente calcolate per contenere la fessurazione in limiti tali da poter considerare reagente a trazione l'intera sezione ed erano previsti con un angolo al centro $\beta \approx 70^\circ$ ed una sezione rastremata alla base di 1.7 m per 1.8 m ed in testa di 0.7 m x 1.8 m. Per valutare il momento di inerzia a sezione costante equivalente, si è valutata conservativamente in prima approssimazione, la sezione pari a 0.7 m, anche se più precisamente poteva calcolarsi con rigidità equivalente avendo svolto un calcolo del cedimento in testa col teorema di Castigliano, applicato per 10 conci di eguale geometria, e per sollecitazione verticale ed orizzontale. Quindi si sono potuti conservativamente applicare per la valutazione della lunghezza equivalente i valori già indicati per i pilastri con $\beta = 90^\circ$ ovvero il limite massimo di $\beta = 70^\circ$, in quanto una L_{eq} maggiore comporta una frequenza naturale minore, per le rigidità flessionali in esame, e quindi un periodo maggiore, essendo $T_B = 0,16347$ s per il sito in esame per Stato Limite di Collasso.

4. Soluzione fondazionale e verifica a scalzamento

Il ponte pedonale era previsto fondato su 4 pali trivellati $\Phi 800$ spazati di 5.6 m ($s/d = 7$) di 10 m di lunghezza in compressione e 5.5 m in trazione, in terreno dapprima ghiaioso-sabbioso molto buono ($N_{SPT60} > 60$) quindi in limi argillosi s.c. ($N_{SPT60} \approx 30$). Due pali erano sollecitati in trazione per le ovvie sollecitazioni di questo tipo di pilastri mensola, mentre le spalle contando sul-

Figura 4
 Progetto di una doppia
 passerella pedonale in
 affiancamento ad un ponte
 ad arco esistente con pilastri
 mensola circolari rastremati
 - Prospetto Lato valle.

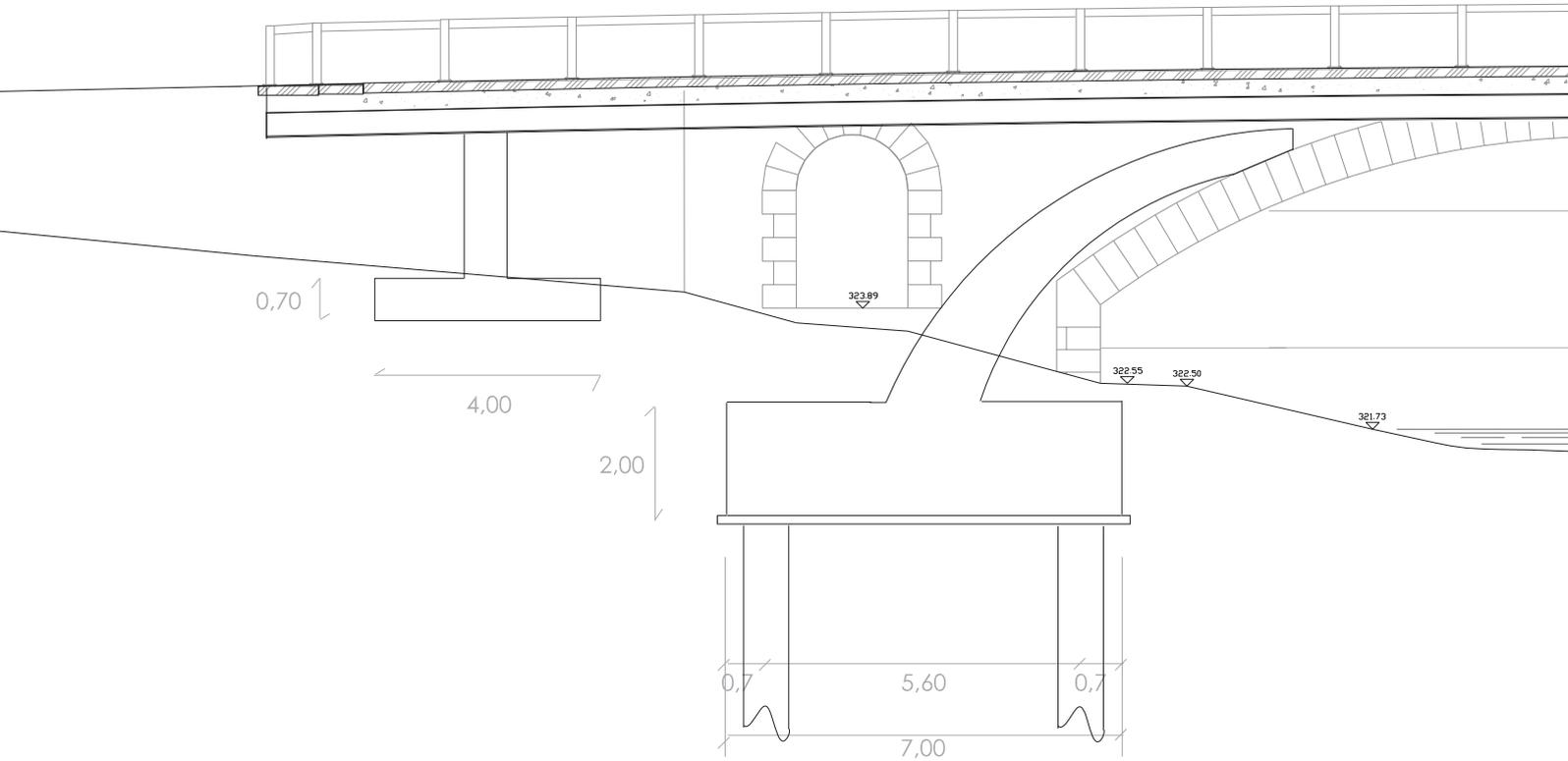
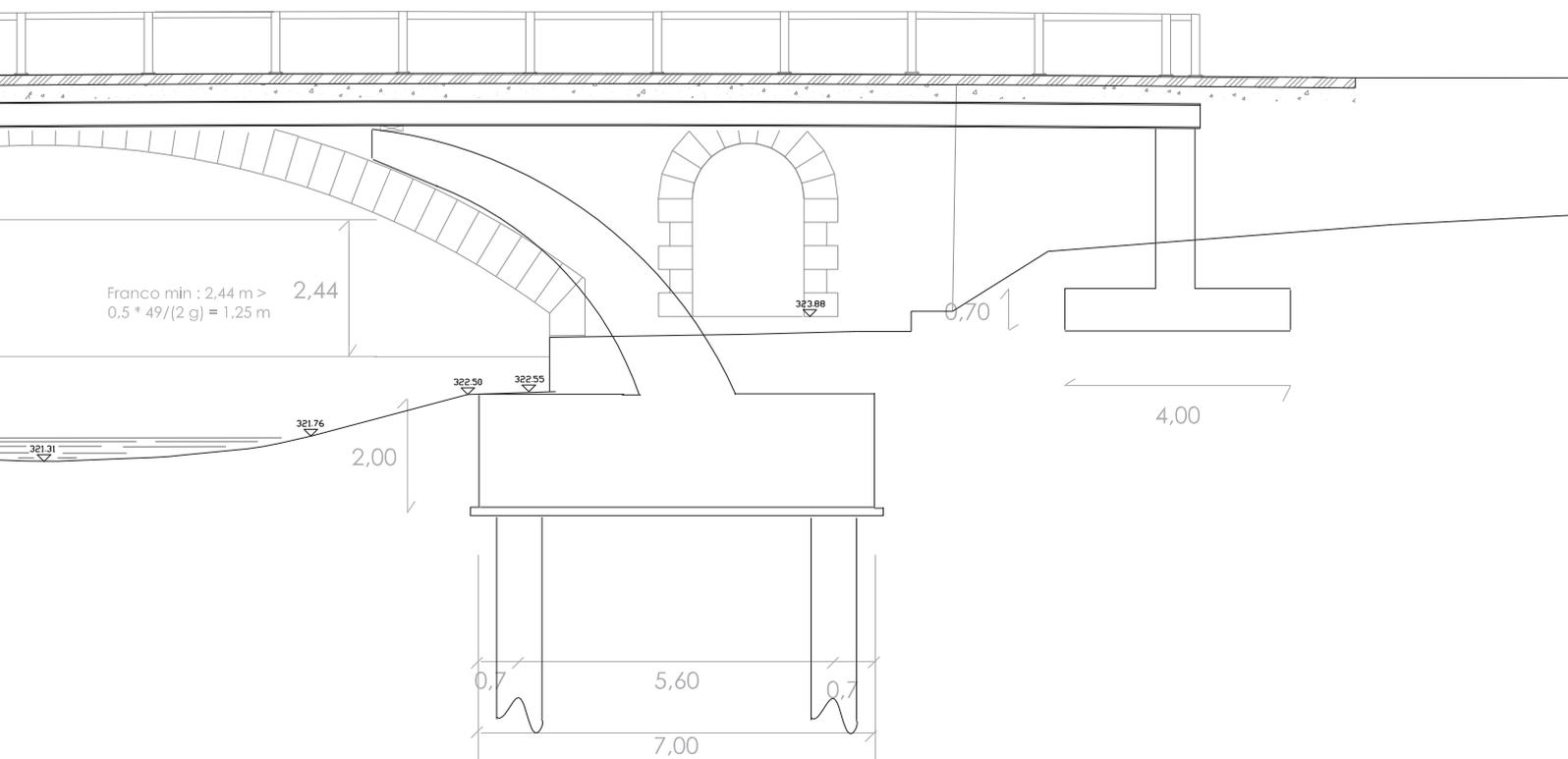


Figura 5
 Vista di valle ravvicinata del
 Ponte San Marco esistente:
 si notano i servizi che in
 Progetto dovevano essere
 nascosti alla vista e la
 sostituenda passerella
 esistente ammalorata.



PROSPETTO LATO VALLE



l'appoggio in terreno ghiaioso molto buono potevano essere realizzate con fondazione diretta. Una verifica a scalzamento ha infine individuato una massima erosione di circa 2 m e di questo si è opportunamente tenuto conto nel dimensionamento della lunghezza pali, come perdita di tensione efficace.

5. Conclusioni

È stato definito un metodo per calcolare la lunghezza equivalente di un pilastro mensola circolare da inserire nelle tradizionali formule di dinamica delle travi per travi a mensola al fine di calcolare le frequenze proprie del pilastro circolare pensato come isolato.

Il metodo è giustificato dall'applicazione di un teorema – corollario dell'analisi matematica ad una variabile, che è stato enunciato e verificato in alcuni semplici esempi.

È notevole che l'applicazione del metodo può essere estesa a pilastri curvi a forma ellittica o parabolica, o conformati con una generica curva monotona, in quanto la forza sismica è applicata in sommità.

Il confronto con analisi modale FEM ha messo in evidenza una buona utilità del metodo nelle verifiche speditive.

Infine è stato mostrato un esempio applicativo per pilastri circolari a sezione rastremata, utilizzato dall'Autore per il progetto definitivo di una doppia passerella pedonale a Borgomanero (No).

Bibliografia

- Baldacci R. (1983) - Scienza delle Costruzioni. Torino: UTET, Vol. 2, 692 pp.
 Garini A.D. (2012) - An Analytical method to control the tunnel lining settlements TC28 Rome, Geotechnical aspects of underground Construction in soft ground, Giulia Viggiani editor CRC Press - Taylor & Francis Group, London UK 1081 pp.

- Giannelli A. (1924) - Lezioni di Teoria dei Ponti dettate nella R.Scuola d'Ingegneria di Roma - 1° anno 1924 -25.
 Krall G. (1970) - Meccanica Tecnica delle Vibrazioni. Roma: Eredi Virgilio Veschi.
 Rugarli P. (2005) - Analisi modale ragionata, EPC LIBRI s.r.l. Roma 509 pp.