

Calcolo immediato della resistenza a taglio degli elementi con armature trasversali: il “Metodo dell’Armatura Equivalente”

Quick evaluation of the shear strength of RC elements: the “Equivalent Reinforcement Method”

Giuseppe Stagnitto¹, Erica Barzoni² ■

Sommario

Le normative italiana e internazionale adottano, per il progetto allo stato limite ultimo degli elementi soggetti ad azioni taglianti, la teoria del traliccio ad inclinazione variabile dei puntoni compressi. Questa teoria, permettendo di individuare la situazione di collasso simultaneo del calcestruzzo compresso e dell’armatura tesa, dà modo di evitare le modalità di collasso fragile, pericolose soprattutto nelle strutture cui è richiesta un’adeguata resistenza antisismica.

Il metodo dell’armatura equivalente, esaurientemente spiegato in questo articolo, fornisce un modello geometrico e meccanico che aiuta il progettista nell’utilizzo della teoria del traliccio variabile, anche nel caso più complesso di armatura trasversale inclinata, perché, con semplici costruzioni grafiche, lo mette in grado di padroneggiare tutte le variabili che governano il problema.

Nell’articolo sono fornite formule “unificate” facilmente implementabili su foglio elettronico utili ai fini di controllo. Una volta afferrato il segreto del metodo, un disegno, anche eseguito manualmente, permette agevolmente di stimare il taglio resistente offerto dalla sezione nei problemi di verifica, oppure l’armatura trasversale necessaria nei problemi di progetto; qualora si voglia ricorrere al disegno computerizzato, i risultati hanno la stessa precisione del calcolo eseguito con formule analitiche, ovvero con appositi programmi di calcolo.

Anche nell’affrontare i casi complessi, come la verifica del taglio resistente in elementi dotati di armature trasversali con diverse inclinazioni, il metodo dell’armatura equivalente è strumento utile d’indagine: con sole semplici operazioni grafiche riottiene gli stessi diagrammi di un utilissimo studio che risolve numericamente il problema con tecniche di programmazione non lineare (Colajanni et al., 2011).

Parole chiave: Traliccio ad inclinazione variabile, metodo dell’armatura equivalente, armatura trasversale inclinata.

Abstract

The Italian and International codes adopt the theory of the variable-angle truss model for the shear design at the ultimate limit state of reinforced concrete elements, which simultaneously evaluates the level of compression of the concrete struts and of the tension in the steel, so brittle failure mechanisms can be controlled and avoided.

The equivalent reinforcement method described in this article provides a mechanical and graphical procedure that permits to control all the variables that govern the problem of the variable-angle truss model, even in the case of inclined reinforcement, providing normalized equations which are easily implementable in an electronic sheet. A freehand drawing permits to estimate the shear strength level or the necessary amount of transversal steel reinforcement, whilst a simple CAD drawing has the same precision of the analytical procedure. The method has been validated through several comparisons; in this article the comparisons with a significant work of Colajanni et al. (2011), resolved through non-linear analyses, is proposed.

Keywords: Variable-angle truss model, equivalent reinforcement method, inclined transversal reinforcement.

¹ Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura dell’Università degli Studi di Pavia - Libero professionista - ✉ giuseppe.stagnitto@unipv.it

² Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura dell’Università degli Studi di Pavia - Collaboratrice esterna - ✉ erica.barzoni@unipv.it

1. Introduzione

Nella progettazione, soprattutto se orientata per assicurare adeguata resistenza antisismica, è da evitarsi la rottura fragile per azioni di taglio. Le modalità di verifica allo stato limite ultime debbono pertanto orientare la sensibilità del progettista per evitare queste pericolose modalità di collasso.

Metodi rapidi di pre-progetto e di controllo del calcolo automatico sono dunque preziosi, soprattutto se basati su una semplice interpretazione meccanica e geometrica.

Molti progettisti sanno che nel metodo ad inclinazione variabile il contributo diretto resistente al taglio del calcestruzzo segue una legge "nascosta" nella variabilità dell'inclinazione del puntone; quanti sono però i progettisti capaci di raffigurarsi mentalmente – con un'immagine adeguata di tipo meccanico e geometrico – la condizione che determina questa inclinazione ottimale?

Scopo dell'articolo è spiegare il *metodo dell'armatura equivalente*: una procedura grafica, ideata dagli autori, che permette il calcolo immediato del taglio con la teoria del traliccio ad inclinazione variabile, seguendo le Norme Tecniche per le Costruzioni (2008), d'ora in avanti NTC'08, per qualunque valore dell'inclinazione dell'armatura stessa: in questo caso il segreto non è "adimensionalizzare" le variabili (come quando si sommano i contributi resistenti) ma "omogeneizzarle" (in quanto i contributi vanno comparati).

Il metodo assimila le bielle compresse di calcestruzzo ad armature d'acciaio trasversali inclinate di densità opportuna, "omogeneizzando", per così dire, il calcestruzzo ad acciaio. Quest'idea di omogeneizzare ad un solo materiale – ben nota nell'ambito dei metodi elastici che la tecnica delle costruzioni ha elaborato per la pressoflessione delle sezioni in c.a. (il cosiddetto "metodo n") – è stata da noi applicata al calcolo a taglio con il procedimento dell'analisi plastica. Ovviamente, il rapporto di omogeneizzazione da considerare non è quello tra i moduli elastici dei materiali, ma quello tra le resistenze di progetto, rispettivamente la resistenza a compressione ridotta per la presenza della fessurazione del calcestruzzo e la resistenza a trazione di progetto dell'acciaio. Grazie all'interpretazione geometrica, in un tempo *sorprendentemente breve*, possono essere trattati problemi altrimenti quasi irrisolvibili (come la compresenza di armature trasversali disposte secondo differenti giaciture), a meno di ricorrere ad appositi programmi di calcolo o a semplificazioni radicali (rinunciando, ad esempio, alla variabilità dell'angolo di inclinazione dei puntoni compressi).

Analogamente al "metodo del vettore unico" (Stagnitto & Bonfante, 2011), che dà un metodo di calcolo immediato per le sezioni in c.a. pressoinflesse, oggetto di corsi di aggiornamento professionale per Ingegneri e di insegnamento universitario (Stagnitto & Barzoni, 2013), il metodo dell'armatura equivalente ha lo scopo di fornire al professionista strumenti agili ed affidabili per il controllo dei risultati forniti dai codici di calcolo.

L'importanza del controllo del calcolo computerizzato e del giudizio di accettabilità dei risultati è riconosciuta dal legislatore che prescrive esplicitamente che le relazioni di calcolo strutturale riportino il "*confronto con i risultati di semplici calcoli, anche di larga massima, eseguiti con metodi tradizionali*" (NTC'08).

I meccanismi resistenti in gioco nella verifica allo stato limite ultimo di un pannello d'anima soggetto ad azioni taglianti non sono facilmente intuibili, tanto è vero che molti progettisti faticano a cogliere anche solo qualitativamente il fenomeno. A questo proposito, un pregio del *metodo dell'armatura equivalente* è il suo valore interpretativo: con un semplice "schizzo", anche tracciato manualmente, sciogliamo dubbi e perplessità (si veda, a questo proposito, il §9).

L'articolo svolge in dettaglio (§6, §7) esempi numerici di verifica e di progetto contenuti in un testo autorevole (Angotti et al., 2011): il lettore comprenderà il vantaggio di unificare, in un unico disegno, differenti verifiche del taglio resistente per diverse scelte dell'armatura trasversale (Figura 32), oppure differenti progetti dell'armatura trasversale per diversi valori del taglio agente (Figura 33).

Diagrammi adimensionali circolari, che legano taglio resistente e densità di armatura trasversale, sono noti da tempo in letteratura, ma *applicati al solo caso di staffe verticali*. Il metodo dell'armatura equivalente estende l'utilizzo del diagramma circolare al caso di staffe comunque inclinate, operando nello spazio delle cosiddette "variabili omogeneizzate", nel quale tutte le grandezze fisiche hanno la dimensione di una lunghezza. Il caso adimensionale può essere ottenuto semplicemente assumendo unitaria la densità di *armatura equivalente*: questa denominazione deriva dall'aver assimilato le bielle compresse in calcestruzzo ad armature in acciaio trasversali inclinate, di densità opportuna. I diagrammi adimensionali, per qualunque inclinazione d'armatura trasversale, possono essere ottenuti senza alcun calcolo.

2. Verifica a taglio con metodi numerico, analitico e di calcolo immediato

2.1 Esempio di verifica a taglio con armatura trasversale inclinata

Per entrare subito in argomento, calcoliamo il taglio resistente in un tratto di trave (rettangolare o a T) in calcestruzzo armato, riferendoci ad un esempio numerico tratto dall'autorevole testo di Angotti et al. (2011), es. 8.1.5.4, pag. 425. Per i simboli riferirsi alla Figura 1.

Sezione rettangolare (o a T) con le seguenti caratteristiche geometriche:

- d (altezza utile) = 750 mm;
- b_w (larghezza della trave, o larghezza dell'anima per sezioni a T) = 200 mm;
- α (inclinazione delle staffe) = 45°;
- $a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = 1.16 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$ (densità dell'armatura trasversale).

Caratteristiche meccaniche dei materiali:

- calcestruzzo C40/50

$$f_{cd} = \frac{0.85 \cdot f_{ck}}{1.5} = \frac{0.85 \cdot 40}{1.5} = 22.66 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (2)$$

$$v \cdot f_{cd} = 0.5 \cdot 22.66 = 11.33 \text{ N/mm}^2$$

- acciaio B450C

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1.15} = \frac{450}{1.15} = 391.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3)$$

Seguendo le NTC'08 (§ 4.1.2.1.3.2) il taglio resistente è fornito dalle seguenti equazioni (le stesse dell'Eurocodice 2 (2005):

$$V_{Rs} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{z \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)}{s} \quad (4)$$

taglio resistente fornito dal meccanismo di taglio-trazione;

$$V_{Rc} = b_w \cdot z \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot v \cdot f_{cd} \cdot \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \quad (5)$$

taglio resistente fornito dal meccanismo di taglio compressione;

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5, \text{ condizione di duttilità} \quad (6)$$

$$V_R = \min(V_{Rs}, V_{Rc}) \quad (7)$$

Nelle formule precedenti:

- θ è l'inclinazione dei puntoni ideali compressi di calcestruzzo rispetto all'asse della trave;
- α è l'inclinazione dell'armatura trasversale;
- z è l'altezza del braccio di leva interna resistente: si calcola con la formula $z = 0.9 \cdot d = 0.9 \cdot 750 = 675 \text{ mm}$.

Affinché il taglio resistente dell'elemento possa essere assunto pari a V_R , le Norme prescrivono di aggiungere all'armatura tesa, un'armatura ΔA_{sl} pari alla **metà dell'armatura longitudinale d'anima** A_{sl} necessaria per assorbire la differenza tra la componente orizzontale della forza di compressione sul puntone di calcestruzzo e la componente orizzontale della forza di trazione sull'armatura trasversale:

$$\Delta A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \cdot \frac{V_R}{f_{yd}} \quad (8)$$

Il taglio resistente può essere ricavato con un procedimento numerico o con formule dirette analitiche. Osserviamo che, nelle formule normative, la resistenza di progetto a compressione del calcestruzzo f_{cd} è ridotta dal coefficiente v (prescritto pari a 0.5 per tutte le classi di calcestruzzo ordinarariamente utilizzate) per tener conto della riduzione di resistenza causata dalle tensioni indotte dalla trazione dell'armatura trasversale e dalla presenza di fessure che intersecano i puntoni ideali compressi. Le formule presenti in letteratura per definire questa riduzione di resistenza sono il ri-

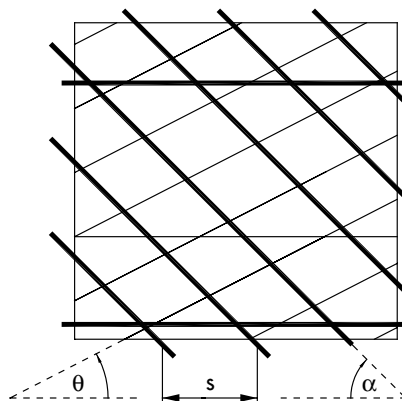
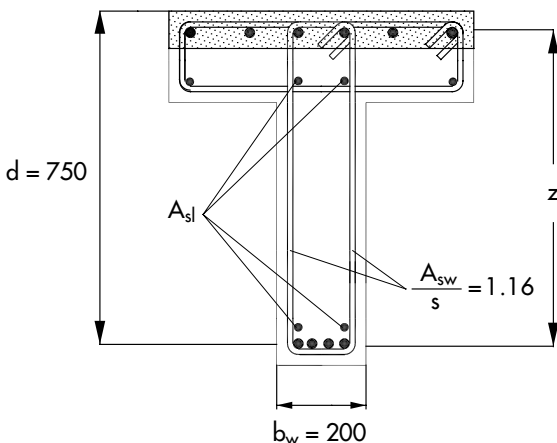


Figura 1
Sezione trasversale longitudinale di un elemento in c.a. e simbologia.

sultato di molte osservazioni sperimentali. In un considerevole libro sul progetto degli elementi bidimensionali (Calvi & Nascimbene, 2011) gli Autori osservano: "l'effetto della formazione delle fessure sulla resistenza locale del calcestruzzo solo a partire dagli anni '60 è stato oggetto di sperimentazione, mentre in precedenza era trascurato come risulta evidente dalla pubblicazione di Rosenblueth del 1955" (Rosenblueth, 1955).

Procedimento numerico

Facendo uso di un foglio elettronico si ricava numericamente il valore di θ per cui $V_{Rs} = V_{Rc}$ che corrisponde al taglio massimo offerto dalla trave. Poiché la rottura avviene per il collasso del calcestruzzo dopo lo snervamento dell'acciaio di armatura trasversale, la condizione di collasso è detta "di duttilità". Come visto, il valore di θ deve però essere compreso tra 21.8° e 45° (valori angolari che corrispondono alle cotangenti limite pari a 2.5 e 1).

Chiariamo che è di tipo *duttile* anche la rottura per il solo cedimento delle staffe (con puntoni di calcestruzzo integri) che contraddistingue gli elementi debolmente armati a taglio. In questo articolo definiamo "condizione di duttilità" quella corrispondente al collasso simultaneo delle bielle compresse e delle armature trasversali, che contraddistingue gli elementi *normalmente armati al taglio*.

Introducendo le due seguenti funzioni trigonometriche:

$$f_s(\alpha, \theta) = \text{sen}\alpha \cdot (\text{cot}\alpha + \text{cot}\theta)$$

$$f_c(\alpha, \theta) = \frac{\text{cot}\alpha + \text{cot}\theta}{1 + \text{cot}^2 \theta} \tag{9}$$

le formule del taglio resistente sono più facilmente memorizzabili in quanto entrambe sono il prodotto di 4 termini: *grandezza geometrica, resistenza, z, funzione trigonometrica*

$$V_{Rs} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot z \cdot f_s(\alpha, \theta) = a_{sw} \cdot f_{yd} \cdot z \cdot f_s(\alpha, \theta),$$

$$V_{Rc} = b_w \cdot (v \cdot f_{cd}) \cdot z \cdot f_c(\alpha, \theta) \tag{10}$$

Osserviamo - è un rilievo fondamentale per lo

sviluppo del *metodo di calcolo immediato* che spiegheremo - che la grandezza geometrica ha, in entrambe le formule, la dimensioni di una lunghezza: o densità di armatura trasversale $a_{sw} = A_{sw}/s$ (rapporto tra l'area di armatura trasversale, sempre misurata nella sezione effettiva, normale all'asse delle armature e il passo tra le armature trasversali stesse, sempre misurato nella direzione longitudinale della trave) o larghezza dell'anima b_w . Si ottiene la Tabella 1 (immediatamente comprensibile) nella quale si è utilizzata l'ultima riga per ricavare a tentativi un valore approssimato dell'angolo incognito θ di inclinazione dei puntoni compressi.

Poiché è $21.8^\circ < \theta = 22.11^\circ < 45^\circ$, il taglio resistente è pari a: $V_R = \min(V_{Rs}; V_{Rc}) = 750 \text{ kN}$.

I diagrammi corrispondenti (Figura 2), invece dell'angolo θ possono avere in ascissa $\text{cot}\theta$: in questo caso il diagramma del taglio resistente nel meccanismo di taglio trazione θ è una funzione lineare (immagine a destra della Figura 2): nei diagrammi leggiamo il taglio resistente pari a 750 kN e θ pari a circa 22° (cotangente prossima al valore limite 2.5).

Procedimento analitico

Dalla letteratura (Angotti et al., 2011) traiamo le formule che permettono di ricavare direttamente l'angolo di inclinazione dei puntoni compressi in condizioni di duttilità.

Convieni organizzare il calcolo analitico in cinque passaggi (a scopo di controllo, come consigliamo a tutti di fare, abbiamo usato anche formule alternative).

1) percentuale meccanica di armatura trasversale:

$$\omega_{sw} = \frac{a_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot (v \cdot f_{cd})} = \frac{1.16 \cdot 391.3}{200 \cdot 11.33} = 0.200 \tag{11}$$

2) angolo di inclinazione dei puntoni:

$$\text{cot}\theta = \frac{1}{\omega_{sw} \cdot \text{sen}\alpha} - 1 = \frac{1}{0.200 \cdot \text{sen } 45^\circ} - 1 =$$

$$= 2.462 \rightarrow \theta = 22.108^\circ \tag{12}$$

oppure (calcolo di controllo):

Tabella 1 - Valori dei tagli resistenti in funzione di V_{Rs} V_{Rc} in funzione di θ

Parametri		θ	θ (rad)	f_s	f_c	V_{Rs}	V_{Rc}
						kN	kN
A_{sw}/s	1.160	21.80	0.38048178	2.47499986	0.482723841	758.3	738.4
α	45	25.00	0.43633231	2.22350217	0.561628417	681.3	859.0
α (rad)	0.785398	30.00	0.52359878	1.93185165	0.683012702	591.9	1044.7
f_{yd}	391.3	35.00	0.61086524	1.71695992	0.798836239	526.1	1221.9
b_w	200	40.00	0.6981317	1.54980383	0.905579788	474.8	1385.1
z	675	45.00	0.78539816	1.41421356	1	433.3	1529.6
$v f_{cd}$	11.33	22.11	0.38585739	2.448	0.490	750.0	750.0

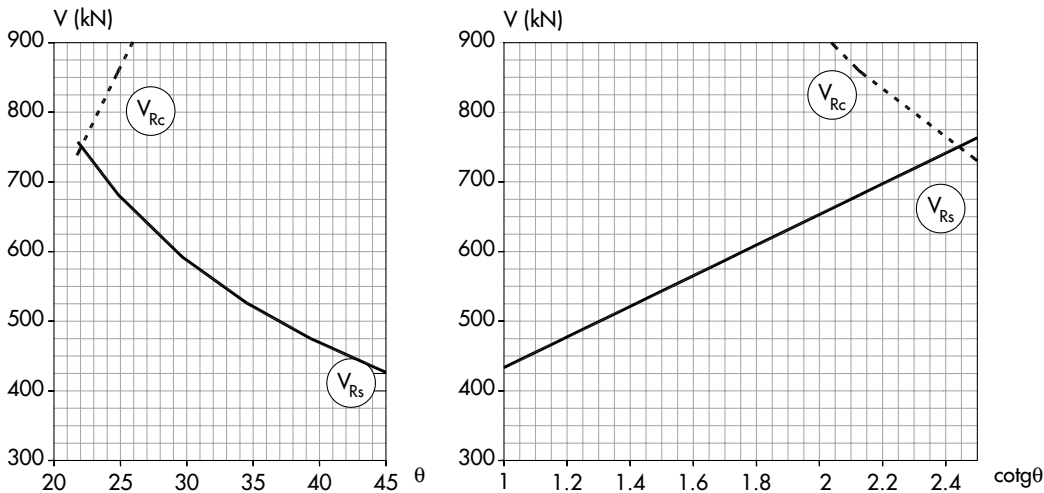


Figura 2
Diagrammi dei tagli resistenti V_{Rs} , V_{Rc} in funzione di θ e di $\cot\theta$.

$$\theta = \arcsen \sqrt{\omega_{sw} \cdot \sen\alpha} = \arcsen \sqrt{0.200 \cdot \sen 45} = \arcsen 0.3764 = 22.108^\circ \quad (13)$$

3) taglio resistente per meccanismo di taglio compressione:

$$f_s(\alpha, \theta) = \sen\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) = \sen 45 \cdot (\cot 45 + 2.462) = 2.448 \quad (14)$$

$$V_{Rs} = a_{sw} \cdot f_{yd} \cdot z \cdot f_s(\alpha, \theta) = 1.16 \cdot 391.3 \cdot 675 \cdot 2.448 = 750 \text{ kN}$$

4) taglio resistente per meccanismo di taglio trazione:

$$f_c(\alpha, \theta) = \frac{\cot\alpha + \cot\theta}{1 + \cot^2\theta} = \frac{\cot 45 + 2.462}{1 + 2.462^2} = 0.490$$

$$V_{Rc} = b_w \cdot (v \cdot f_{cd}) \cdot z \cdot f_c(\alpha, \theta) = 200 \cdot 11.33 \cdot 675 \cdot 0.490 \cong 750 \text{ kN} \quad (15)$$

$$V_R = \min(V_{Rs}, V_{Rc}) \cong 750 \text{ kN}$$

5) armatura longitudinale aggiuntiva

$$A_{sl} = (\cot\theta - \cot\alpha) \cdot \frac{V_R}{f_{yd}} = (2.462 - 1) \cdot \frac{750 \cdot 10^3}{391.3} = 2.802 \text{ mm}^2 \quad (16)$$

$$\Delta A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot 2.802 = 1.401 \text{ mm}^2$$

Calcolo immediato del taglio resistente

Con il metodo dell'armatura equivalente (di cui sarà data giustificazione nell'articolo), un solo calcolo è necessario.

Calcoliamo la *densità di armatura trasversale verticale equivalente alla larghezza dell'anima* (cosiddetta *armatura equivalente*): si ottiene semplicemente moltiplicando la larghezza dell'anima per il rapporto tra la resistenza del calcestruzzo (ridotta in quanto fessurato) e la resistenza dell'acciaio:

$$\beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{11.33}{391.3} \cdot 200 = 5.79 \text{ mm} \quad (17)$$

Si traccia una retta orizzontale, la cui direzione rappresenta l'asse longitudinale della trave, e, da un punto qualunque fissato come origine, si traccia un segmento perpendicolare di lunghezza $\beta_w = 5.79 \text{ mm}$. Per guadagnare in precisione si può adottare una qualunque scala moltiplicativa (ad esempio adottare la scala 10:1, oppure 20:1).

La scala grafica è comune a tutte le operazioni grafiche che eseguiremo.

Si traccia un semicerchio con diametro il segmento di lunghezza β_w ; chiamiamo *cerchio di equivalenza* il cerchio che ha come diametro β_w (Figura 3).

Partendo dall'origine si traccia un vettore inclinato di $\alpha = 45^\circ$ di e di lunghezza $a_{sw} = A_{sw}/s = 1.16 \text{ mm}^2/\text{mm} = 1.16 \text{ mm}$: è il *vettore della densità d'armatura trasversale* (o, semplicemente, *d'armatura trasversale*). Partendo dalla punta del vettore si traccia una semiretta orizzontale fino ad incontrare il semicerchio. Si misura la lunghezza del segmento: $v = V/(z \cdot f_{yd})$.

Risulta $v = 2.85 \text{ mm}$ (ad esempio avendo letto 5.7 cm, con la scala 20:1). Siamo già in grado di stimare il taglio resistente: $V_R = v \cdot z \cdot f_{yd} = 2.85 \cdot 675 \cdot 391.3 = 753 \text{ kN} \cong 750 \text{ kN}$.

È immediata anche la procedura grafica per determinare l'armatura longitudinale aggiuntiva (Figura 5).

Figura 3
Disegno del (semi)cerchio di equivalenza.

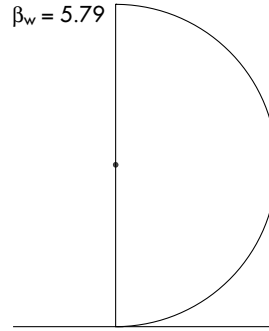
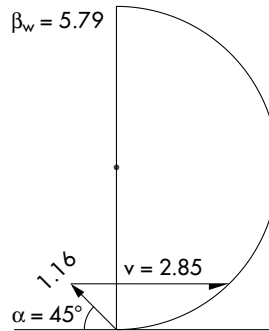


Figura 4
Disegno del vettore d'armatura trasversale e lettura della lunghezza v.



Dalla punta del vettore d'armatura trasversale si traccia una semiretta ortogonale al vettore stesso, fino ad intercettare il diametro del cerchio di equivalenza e si misura la lunghezza del segmento così definita che è pari a $a_{sl} = A_{sl}/z$.

Risulta $a_{sl} = 4.15$ mm (ad esempio avendo letto 8.3 cm con la scala 20:1):

$$A_{sl}/z = 4.15 \text{ mm} \rightarrow A_{sl} = 4.15 \cdot 675 = 2800 \text{ mm}^2 \rightarrow$$

$$\Delta A_{sl} = A_{sl}/2 = 1.400 \text{ mm}^2$$

(18)

Anche l'angolo di inclinazione del puntone compreso è rilevabile sul disegno.

Risulta $\theta \cong 22^\circ$, valore compreso nell'intervallo ammesso ($21.8^\circ < \theta < 45^\circ$).

Osserviamo che il metodo grafico esposto è *rigoroso* per cui eseguendo le operazioni con il disegno computerizzato (e leggendo le lunghezze con più decimali) si riottengono i valori analitici

di V_R , ΔA_{sl} , θ .

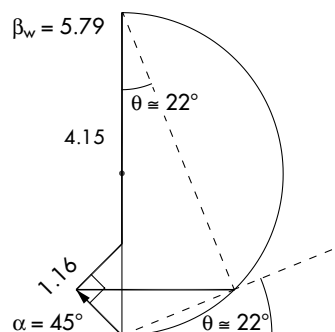
Diamo, per comodità del lettore, lo schema generale del metodo grafico dell'armatura equivalente (Figura 6).

Una precisazione: usare il compasso non è obbligatorio

Il nostro metodo permette dunque di stimare graficamente il taglio resistente con un numero ridottissimo di calcoli. Una volta compreso il meccanismo del metodo, non è neppure necessario utilizzare il compasso.

Ecco come eseguire la verifica con il solo righello: dalla punta del vettore d'armatura trasversale si traccia una semiretta orizzontale e si determina il segmento di lunghezza v , misurando dal centro del cerchio di equivalenza una lunghezza pari al raggio del cerchio, cioè pari a $\beta_w/2 = 5.79/2 = 2.9$ mm. Ovviamente conviene eseguire

Figura 5
Costruzione grafica per determinare la densità di armatura longitudinale.



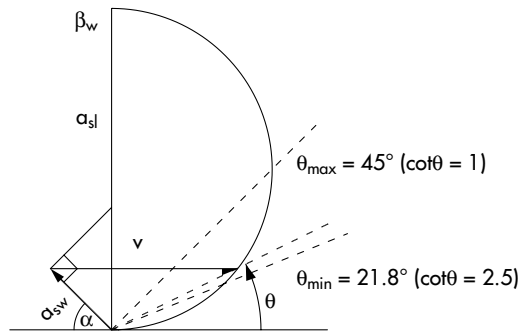


Figura 6
Schema generale del metodo grafico dell'armatura equivalente.

il disegno manuale con una scala adeguata. La Figura 7 comprende tutte le operazioni grafiche necessarie per stimare: l'angolo di inclinazione dei puntoni, il taglio resistente e l'armatura longitudinale aggiuntiva.

2.2 Semplificazioni per il caso di staffe verticali
Calcoliamo il taglio resistente in un tratto di trave (rettangolare o a T) con staffe verticali (Figura 8). Dati di progetto:

$$f_{yd} = 391.3 \text{ N/mm}^2, v \cdot f_{cd} = 0.5 \cdot 14.17 = 7.085 \text{ N/mm}^2,$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 12}{200} = \frac{2 \cdot 113.1}{200} = 1.131 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

$$z = 0.9 \cdot d = 0.9 \cdot 500 = 450 \text{ mm} \quad \alpha = 90^\circ$$

Procedimento analitico

Per la maggior semplicità delle formule utilizziamo solamente il procedimento analitico:

$$\omega_{sw} = \frac{a_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot (v \cdot f_{cd})} = \frac{1.131 \cdot 391.3}{300 \cdot 7.085} = 0.208$$

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{1}{\omega_{sw}} - 1} = \sqrt{\frac{1}{0.208} - 1} = 1.951 \rightarrow \theta = 27.134^\circ$$

$$f_s(\alpha, \theta) = \cot \theta = 1.951$$

$$V_{Rs} = a_{sw} \cdot f_{yd} \cdot z \cdot f_s(\alpha, \theta) = 1.131 \cdot 391.3 \cdot 450 \cdot 1.951 \cong 388.5 \text{ kN}$$

$$(19) \quad f_c(\alpha, \theta) = \frac{1}{\cot \theta + \frac{1}{\cot \theta}} = \frac{1}{1.951 + \frac{1}{1.951}} = 0.406 \quad (20a)$$

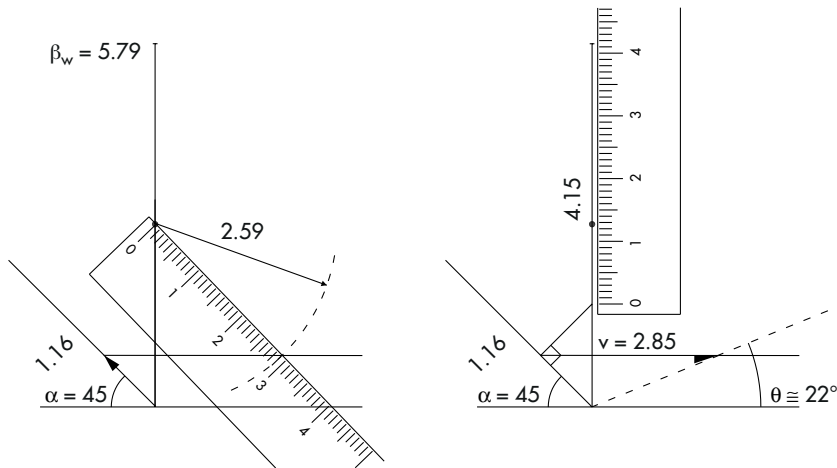


Figura 7
Verifica grafica immediata del taglio resistente utilizzando il solo righello.

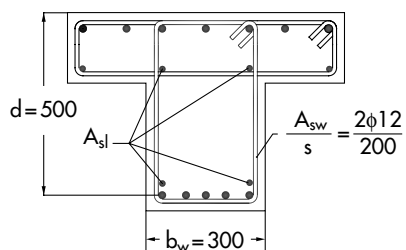


Figura 8
Sezione di un elemento di trave con armatura trasversale verticale.

$$V_{Rc} = b_w \cdot (v \cdot f_{cd}) \cdot z \cdot f_c(\alpha, \theta) = 300 \cdot 7.085 \cdot 450 \cdot 0.406 \cong 388.5 \text{ kN}$$

$$V_R = \min(V_{Rs}, V_{Rc}) \cong 388.5 \text{ kN}$$

$$A_{sl} = \cot\theta \cdot \frac{V_R}{f_{yd}} = 1.951 \cdot \frac{388.5 \cdot 10^3}{391.3} = 1.937 \text{ mm}^2$$

$$\Delta A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot 1.938 = 969 \text{ mm}^2 \quad (20b)$$

Calcolo immediato del taglio resistente

Calcoliamo la densità dell'armatura equivalente:

$$\beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{7.085}{391.3} \cdot 300 = 5.43 \text{ mm} \quad (21)$$

La Figura 9 comprende tutte le operazioni grafiche necessarie per stimare: il taglio resistente, l'angolo di inclinazione dei puntoni e l'armatura longitudinale aggiuntiva.

Dalla punta del vettore d'armatura trasversale (cioè dal punto a quota $A_{sw}/s = 1.13 \text{ mm}$) si traccia una semiretta orizzontale e si determina il

segmento di lunghezza v misurando dal centro del cerchio di equivalenza una lunghezza pari al raggio del cerchio, cioè pari a $\beta_w/2 = 5.43/2 \cong 2.7 \text{ mm}$. Si controlla che $21.8^\circ < \theta \cong 27^\circ < 45^\circ$. Si misura la lunghezza v e si calcola il taglio resistente:

$$V_R = v \cdot z \cdot f_{yd} = 2.2 \cdot 450 \cdot 391.3 \cong 387 \text{ kN} \quad (22)$$

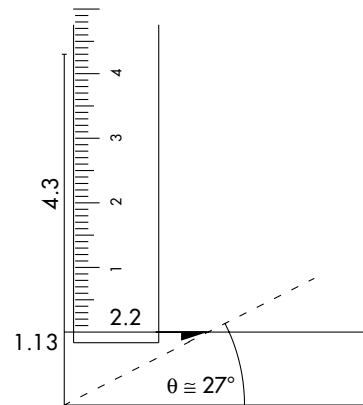
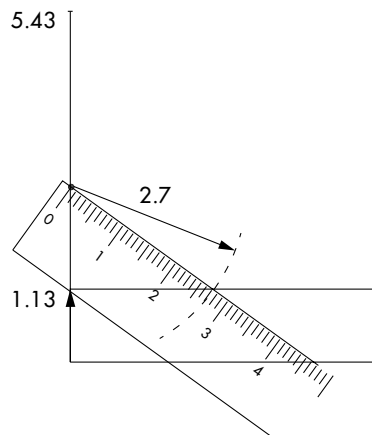
La lunghezza del segmento che corrisponde A_{sl}/z risulta pari a 4.3 mm :

$$A_{sl} = 4.3 \cdot z = 4.3 \cdot 450 = 1.935 \text{ mm}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta A_{sl} = \frac{A_{sl}}{2} = 967 \text{ mm}^2 \quad (23)$$

Osserviamo ancora che il metodo grafico esposto è rigoroso, per cui con il disegno computerizzato (e leggendo le lunghezze con più decimali) si riottengono i valori analitici e $\theta = 27.134^\circ$, $V_R = 388.5 \text{ kN}$ e $\Delta A_{sl} = 969 \text{ mm}^2$.

Figura 9
Verifica grafica immediata del taglio resistente nel caso di staffe verticali.



3. Interpretazione meccanica del metodo dell'armatura equivalente

Facciamo riferimento alla schematizzazione della trave secondo il noto modello a traliccio di Ritter-Mörsh con inclinazione variabile del puntone compresso (Figura 10). Come noto, lo sviluppo della teoria che ha fornito le formule della normativa italiana e internazionale, è fondato sul teorema statico della teoria della plasticità applicando il cosiddetto "metodo dei campi di tensioni" (Muttoni et al., 1997): l'azione interna resistente calcolata sulla base di "campi di tensione staticamente ammissibili" è a favore di sicurezza. Per il meccanismo di resistenza a taglio-trazione (Figura 11), il taglio resistente V_{Rs} è la componente

verticale della forza F_{Rs} corrispondente allo snervamento dell'acciaio dell'armatura trasversale (il termine tra parentesi quadre è il numero di meccanismi resistenti nella lunghezza di riferimento):

$$F_{Rs} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \left[\frac{z \cdot (\cot\alpha + \cot\theta)}{s} \right] \quad (24)$$

Per il meccanismo di resistenza a taglio-compressione (Figura 11), il taglio resistente V_{Rc} è la componente verticale della forza F_{Rc} corrispondente alla resistenza del puntone (detto anche "biella") di calcestruzzo (tensione limite a compressione moltiplicata per l'area trasversale della sezione del puntone):

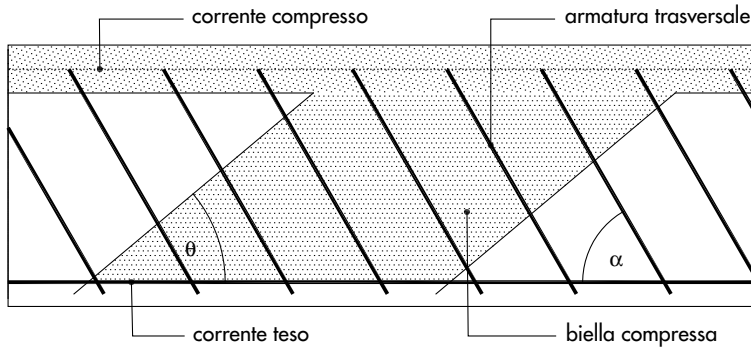


Figura 10
Il modello a traliccio di Ritter-Mörsh con inclinazione variabile del puntone compresso.

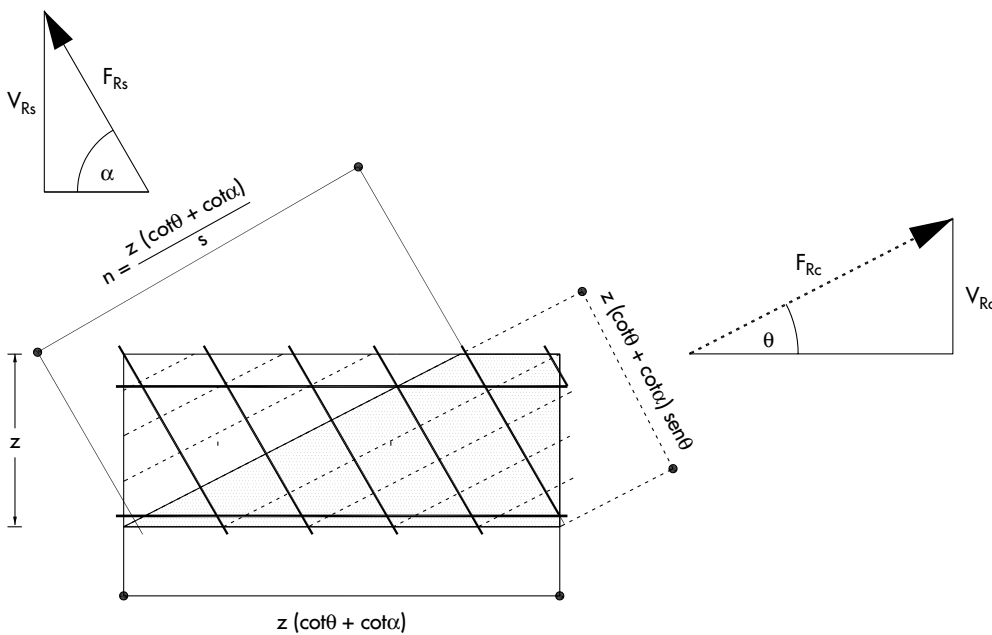


Figura 11
Resistenze dei meccanismi di taglio-trazione e di taglio-compressione.

$$F_{Rc} = (v \cdot f_{cd}) \cdot b_w \cdot z \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \text{sen}\theta$$

(25)

Ora, per meglio comprendere il nostro metodo di calcolo immediato, accostiamo i due vettori anzidetti (Figura 12) e traduciamo geometricamente l'eguaglianza $V = V_{Rs} = V_{Rc}$ designata, come già detto, *condizione di duttilità*: raggiungimento del valore limite del taglio con il collasso simultaneo delle bielle compresse e delle armature trasversali tese.

L'ultimo triangolo della Figura 12 si ottiene dividendo ciascun lato del triangolo centrale della stessa figura per il termine $z \cdot f_{yd} \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)$. Infatti:

$$\frac{F_{Rs}}{z \cdot f_{yd} \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)} = \frac{A_{sw}}{s} = a_{sw}$$

$$\frac{F_{Rc}}{z \cdot f_{yd} \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)} = b_w \cdot \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot \text{sen}\theta = \beta_w \cdot \text{sen}\theta$$

$$\frac{V \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)}{z \cdot f_{yd} \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)} = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = v$$

(26)

Questo triangolo (nel quale il lettore avrà già riconosciuto la *chiave risolutrice* dello schema generale della Figura 6) ha un profondo significato concettuale.

Poiché il vettore di sinistra, inclinato dell'angolo α , rappresenta la densità di armatura trasversale a_{sw} , l'altro vettore può essere interpretato come la *densità di armatura trasversale equivalente* al puntone compresso.

Mentre però la lunghezza del primo vettore è indipendente dal proprio angolo di inclinazione (in quanto il passo s nel rapporto $A_{sw}/s = a_{sw}$,

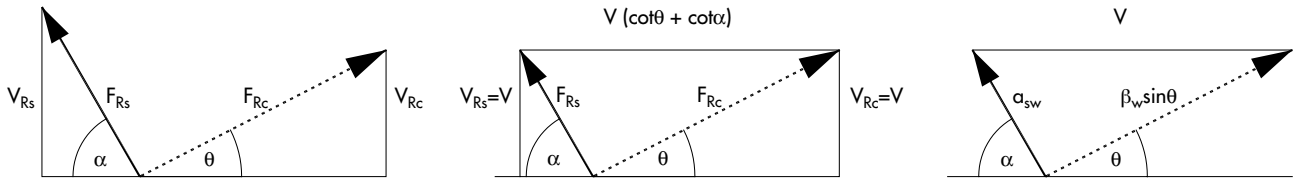


Figura 12 Traduzione geometrica della "condizione di duttilità".

è sempre misurato in direzione longitudinale) la lunghezza del secondo vettore è pari al prodotto $\beta_w \cdot \sin\theta$ e quindi dipende dall'inclinazione stessa.

Pertanto la grandezza $\beta_w = b_w \cdot v \cdot f_{cd}/f_{yd}$ rappresenta la densità dell'armatura trasversale equivalente all'anima in calcestruzzo quando i puntoni sono verticali (infatti si ha quando $\beta_w \cdot \sin\theta = \beta_w$ quando $\theta = 90^\circ$).

La "condizione di duttilità" (vedi §2.1) esprime l'uguaglianza delle componenti verticali dei due vettori di modulo α_{sw} e $\beta_w \cdot \sin\theta$.

Osserviamo che anche la grandezza $v = V/z \cdot f_{yd}$ ha, come la densità di armatura trasversale $\alpha_{sw} = A_{sw}/s$ e la densità di armatura equivalente $\beta_w \cdot \sin\theta$, la dimensione fisica di una lunghezza. Il segreto della semplicità del metodo è appunto operare in questo spazio che abbiamo definito "spazio delle variabili omogeneizzate".

Riconsideriamo il vettore di lunghezza $\beta_w \cdot \sin\theta$: dalle relazioni trigonometriche che legano i lati dei triangoli rettangoli deduciamo che $\beta_w \cdot \sin\theta$ può essere considerato il cateto di un triangolo

(cateto opposto all'angolo θ) la cui ipotenusa ha lunghezza β_w .

Pertanto, nota la lunghezza β_w , il vettore dell'armatura equivalente può essere ottenuto costruendo il relativo triangolo rettangolo.

Per il teorema di Talete i vertici di questi triangoli rettangoli definiscono un cerchio che ha come diametro la comune ipotenusa: è il cerchio che abbiamo già denominato "cerchio di equivalenza".

Quindi è sufficiente calcolare β_w , ovvero la densità dell'armatura trasversale verticale equivalente all'anima in calcestruzzo, per conoscere la densità di armatura equivalente per ogni altra inclinazione.

Poiché in condizioni di duttilità la componente verticale della densità di armatura trasversale e la componente verticale della densità di armatura equivalente devono uguagliarsi, in quanto hanno come risultante il vettore orizzontale del taglio (Figura 12), risulta dimostrata la costruzione grafica da noi sviluppata che dà, a meno del prodotto $z \cdot f_{yd}$, il taglio resistente $V_R = V_{R_s} = V_{R_c}$. Il metodo dell'armatura equivalente fornisce un

Figura 13 Legge geometrica della densità di armatura trasversale equivalente.

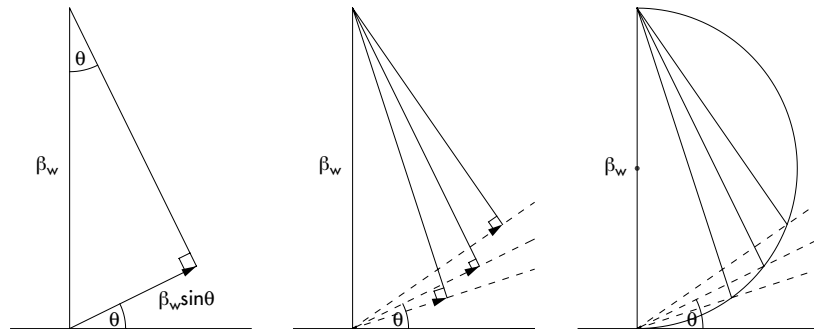
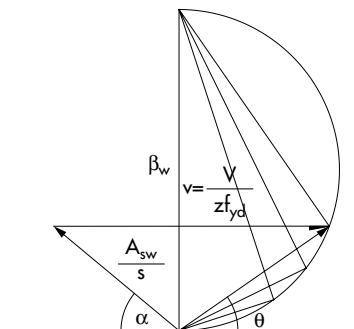


Figura 14 Eguaglianza delle componenti verticali delle densità di armatura trasversale ed equivalente.



modello meccanico che aiuta l'intuizione del progettista: le bielle compresse in calcestruzzo sono assimilate ad armature d'acciaio, inclinate, di densità opportuna.

Nella Figura 15 è rappresentata questa interpretazione meccanica: per maggiore chiarezza, abbiamo riportato a sinistra il vettore di lunghezza $a_{sw} = A_{sw}/s$ (generalmente inclinato di α) relativo all'effettiva armatura trasversale e a destra l'armatura equivalente, la cui densità dipende dall'inclinazione θ .

Nella Figura 15, la densità dell'armatura trasversale equivalente è rappresentata sia dalla larghezza variabile (ombreggiata) dell'armatura d'acciaio, sia dalla lunghezza del vettore $\beta_w \cdot \sin\theta$.

Questa densità di armatura trasversale (che vale β_w nel caso teorico di $\theta = 90^\circ$) diventa sempre minore quanto minore è l'inclinazione θ . Nel disegno, la lunghezza del vettore (o la larghezza della parte ombreggiata) è appunto proporzionale alla densità $\beta_w \cdot \sin\theta$.

Fissate la densità di armatura trasversale $a_{sw} = A_{sw}/s$ e l'inclinazione dell'armatura, vi è una sola armatura equivalente che ha la stessa componente verticale.

La costruzione geometrica appena vista, suggerisce la seguente relazione analitica, che fornisce un'altra equazione risolvete per θ (che abbiamo utilizzato, a scopo di controllo, nell'esempio numerico iniziale):

$$a_{sw} \cdot \sin\alpha = (\beta_w \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta \rightarrow \sin^2\theta = \left(\frac{a_{sw}}{\beta_w}\right) \cdot \sin\alpha$$

$$\cdot \sin\alpha = \omega_{sw} \cdot \sin\alpha \rightarrow \theta = \arcsin \sqrt{\omega_{sw} \cdot \sin\alpha}$$

(27)

Nella formula, ω_{sw} è la cosiddetta percentuale meccanica di armatura trasversale:

$$\omega_{sw} = \frac{a_{sw}}{\beta_w} = \frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{s \cdot b_w \cdot v f_{cd}} \quad (28)$$

3.1 Equilibrio nello spazio delle variabili omogeneizzate

Riprendiamo la schematizzazione dell'elemento di trave secondo il modello a traliccio di Ritter-Mörsh.

Nella Figura 16 riconosciamo (sotto il pannello dell'anima "estratto" dall'elemento in cemento armato, come sarà meglio chiarito al punto successivo §3.2) il triangolo già visto che ricava il vettore di lunghezza $\beta_w \cdot \sin\theta$ (compressione del calcestruzzo) come la somma vettoriale dei vettori di lunghezza a_{sw} e v (modulo del vettore del taglio in direzione orizzontale).

Osserviamo che, a meno del fattore f_{yd} , lo spazio delle variabili omogeneizzate è lo stesso delle forze unitarie: in altre parole il vettore che rappresenta la "densità di forza" (ad unità di lunghezza orizzontale e verticale) si ottiene moltiplicando per f_{yd} quello che rappresenta la "densità di armatura".

Il segreto del metodo dell'armatura equivalente è stato appunto quello di ridurre a densità di armatura equivalente anche il contributo resistente dell'anima della trave in calcestruzzo.

Ora consideriamo l'equilibrio delle forze unitarie (cioè, a meno del fattore f_{yd} , l'equilibrio dei vettori delle densità di armatura) intercettate da una sezione perpendicolare all'asse della trave: si ottiene il poligono a destra del pannello dell'anima. Nel poligono, il vettore di modulo $\beta_w \cdot \cos\theta$ (compressione del calcestruzzo) è la somma dei vettori di lunghezza

$$\frac{A_{sw}}{s \cdot \tan\alpha} = a_{sw} \cdot \cot\alpha, a_{sl} = \frac{A_{sl}}{z} \quad (29)$$

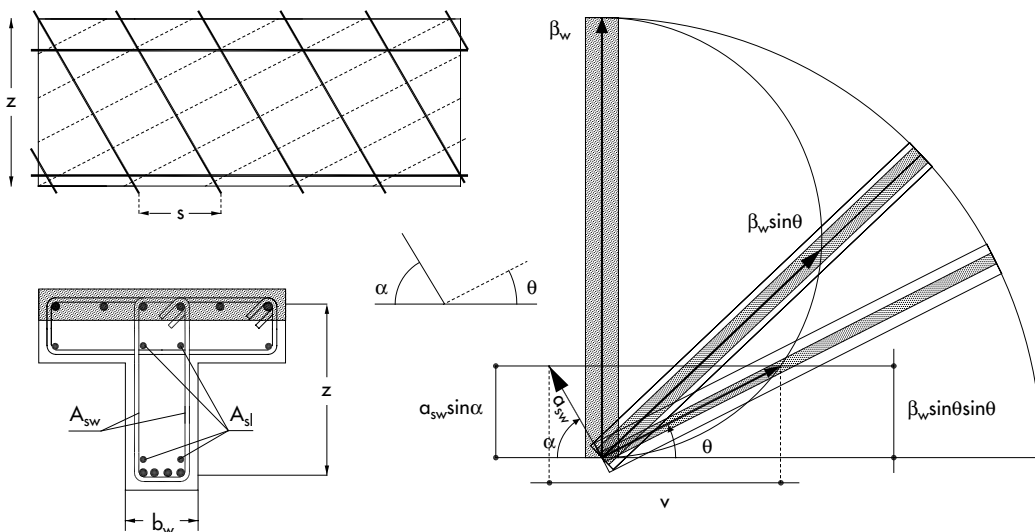
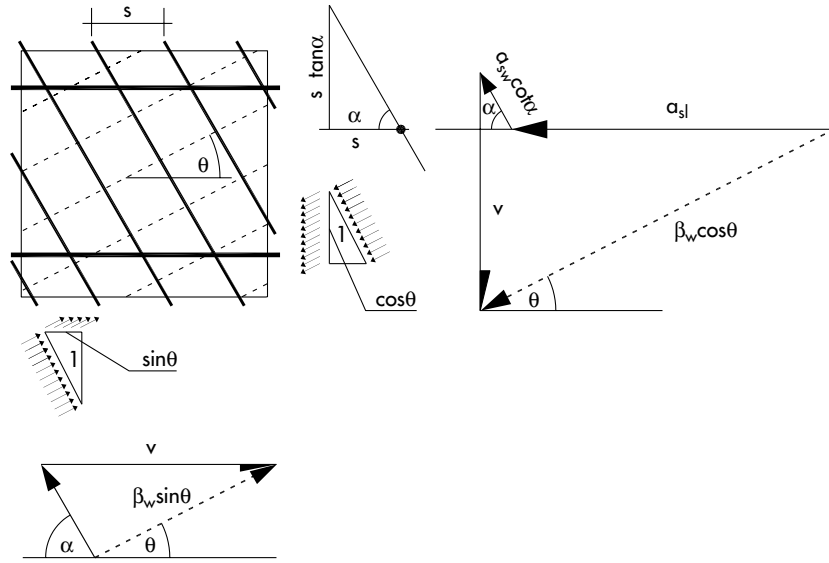


Figura 15 Interpretazione meccanica del metodo dell'armatura equivalente.

Figura 16
Equilibri vettoriali nelle
sezioni orizzontale e
verticale del pannello
d'anima.



e v (modulo del vettore del taglio in direzione verticale).

Le condizioni di equilibrio espresse nella Figura 16 possono essere interpretate come segue:

- il pannello in calcestruzzo armato è soggetto ai soli vettori \vec{v} sulle facce orizzontale e verticale;
- il pannello in calcestruzzo (considerato non armato) è soggetto ai vettori che provocano la compressione in direzione inclinata di θ ; il calcestruzzo, nella direzione delle armature, è cioè scaricato dalla resistenza delle stesse armature, avendo ipotizzato nulla la resistenza a trazione del calcestruzzo.

Sulla faccia orizzontale, il vettore di lunghezza $\beta_w \cdot \sin\theta$ è somma del taglio \vec{v} e del vettore \vec{a}_{sw} con direzione dell'armatura trasversale. Invece, sulla faccia verticale, il vettore di lunghezza $\beta_w \cdot \cos\theta$ è somma del taglio \vec{v} , del vettore $\vec{a}_{sw} \cdot \cot\alpha$ con direzione dell'armatura trasversale e del vettore $\vec{a}_{sl} = A_{sl}/z$ con direzione dell'armatura longitudinale.

Concentrando la nostra attenzione sul vettore di lunghezza $\beta_w \cdot \cos\theta$ potremmo riottenere il cerchio di equivalenza con la stessa costruzione della Figura 13. La condizione di duttilità con riferimento alle armature intercettate dalla sezione perpendicolare all'asse della trave riguarderebbe, in modo duale, l'uguaglianza delle componenti orizzontali del vettore dell'armatura equivalente di lunghezza $\beta_w \cdot \cos\theta$ e del vettore risultante $\vec{a}_{sl} + \vec{a}_{sw} \cdot \cot\alpha$.

Pertanto β_w è la densità dell'armatura trasversale equivalente (in corrispondenza del valore teorico $\theta = 90^\circ$) o la densità dell'armatura longitudinale equivalente (in corrispondenza del valore teorico $\theta = 0^\circ$): per questo motivo è stata denominata

tout court *armatura equivalente* la lunghezza del diametro del cerchio di equivalenza.

Usiamo il cerchio come "strumento di allineamento"

Come abbiamo rilevato commentando la Figura 16, il problema della ricerca dell'inclinazione che annulla le trazioni nel calcestruzzo, si riconduce ad un "problema di allineamento" dei due vettori rappresentanti la forza unitaria di compressione sulla faccia orizzontale e su quella verticale del pannello dell'anima.

Non deve stupire che il modulo di questi due vettori sia differente: infatti la lunghezza unitaria misurata in direzione perpendicolare all'inclinazione delle bielle compresse si traduce in lunghezze differenti nella direzione orizzontale (ove vale $1 \cdot \sin\theta$) e nella direzione verticale (ove vale $1 \cdot \cos\theta$), anche se i due vettori devono sempre essere allineati.

Poiché i due vettori \vec{v} hanno la stessa lunghezza (come dimostreremo nel punto successivo) possiamo pensare di ruotare di 90° , in senso antiorario, il poligono di equilibrio della faccia verticale e poi **far coincidere in un unico vettore i due vettori** \vec{v} . Dopo la rotazione, l'originario problema di allineamento è ricondotto ad un *problema di ortogonalità* che, per il teorema di Talete, è risolto con l'ausilio del cerchio di equivalenza.

La semplicità grafica del metodo dell'armatura equivalente deriva dal fatto che viene sfruttata sino alle estreme conseguenze la simmetria degli sforzi taglianti, tanto da sovrapporre in un "unico" vettore i vettori dei tagli agenti in direzione orizzontale e verticale. La compressione di questa semplificazione e la possibilità di eseguire l'operazione inversa di "scompattare" la costru-

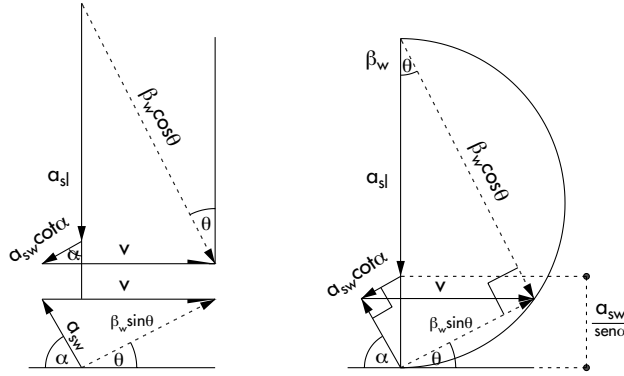


Figura 17
Semplificazione grafica derivante dalla sovrapposizione dei vettori \vec{v} .

zione grafica risolvete permette di comprendere meglio gli aspetti fisici del problema, fino a risolvere per via immediata problemi altrimenti complessi (vedi il successivo punto 9).

Una precisazione sull'armatura longitudinale d'anima A_{sl}

Chiariamo che l'armatura longitudinale d'anima A_{sl} è quella complessiva sull'altezza z del pannello d'anima (vedere, ad esempio, le Figure 1 e 8). Negli elementi lineari in c.a. è prescritto (§2.1) che una quota pari alla metà di essa debba essere aggiunta all'armatura del corrente teso:

$$\Delta A_{sl} = \frac{A_{sl}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) \cdot \frac{V}{f_{yd}} \quad (30)$$

Le Norme tecniche (formula 4.1.22)(Norme Tecniche per le Costruzioni, 2008) adottano la procedura alternativa di traslazione del diagramma del momento di una lunghezza pari a $z/2 \cdot (\cot\theta - \cot\alpha)$.

L'Eurocodice 2 (Eurocodice 2, 2005; formula 6.18) dà invece l'espressione della corrispondente forza di trazione aggiuntiva nell'armatura longitudinale resistente a pressoflessione:

$$\Delta F_t = 1/2 \cdot V \cdot (\cot\theta - \cot\alpha).$$

Dalla costruzione geometrica della Figura 17 si trae immediatamente la seguente formula:

$$a_{sl} = \beta_w - a_{sw}/\text{sen}\alpha.$$

Dimostriamo che questa formula coincide con la formula $a_{sl} = v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha)$.

Utilizzando la simbologia della Figura 18, applichiamo i teoremi di Pitagora e di Euclide:

$$q^2 = a_{sw}^2 - r^2$$

$$p^2 = (\beta_w - r) \cdot r$$

$$\begin{aligned} v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) &= (p+q) \cdot \left(\frac{p}{r} - \frac{q}{r} \right) = (p+q) \cdot \frac{(p-q)}{r} = \\ &= \frac{p^2 - q^2}{r} = \frac{\beta_w \cdot r - r^2 - a_{sw}^2 + r^2}{r} \quad \beta_w - \frac{a_{sw}}{\text{sen}\alpha} = a_{sl} \end{aligned} \quad (31)$$

Quando si deve porre $\theta = \theta_{\min} = 21.8^\circ$ (caso di elementi *debolmente armati a taglio*) si ha:

$$\begin{aligned} a_{sl} &= v \cdot (\cot\theta_{\min} - \cot\alpha) = a_{sw} \cdot (\cos\alpha + 2.5 \cdot \text{sen}\alpha) \cdot \\ &\cdot (2.5 - \cot\alpha) = 7.25 \cdot a_{sw} \cdot \text{sen}\alpha - \frac{a_{sw}}{\text{sen}\alpha} \end{aligned} \quad (32)$$

Nel caso di armature trasversali verticali ($\alpha = 90^\circ$):

$$a_{sl} = 6.25 \cdot a_{sw}$$

L'interpretazione geometrica della formula è fornita dalla parte sinistra della Figura 19:

$$\begin{aligned} a_{sl} &= \frac{\sqrt{(a_{sw} \cdot \text{sen}\alpha)^2 + (2.5 \cdot a_{sw} \cdot \text{sen}\alpha)^2}}{\text{sen}\theta_{\min}} - \frac{a_{sw}}{\text{sen}\alpha} = \\ &= 7.25 \cdot a_{sw} \cdot \text{sen}\alpha - \frac{a_{sw}}{\text{sen}\alpha} = \beta_w^* - \frac{a_{sw}}{\text{sen}\alpha} \end{aligned} \quad (33)$$

Vale pertanto la costruzione fondamentale della Figura 6, utilizzando il minore diametro β_w^* ; in questo caso il calcestruzzo raggiunge una tensione minore rispetto alla resistenza a compressione ridotta: $\sigma_c = v \cdot f_{cd} \cdot (\beta_w^*/\beta_w)$.

Quando si deve porre $\theta = \theta_{\max} = 45^\circ$ (caso di elementi *fortemente armati a taglio*) si ha:

$$\begin{aligned} a_{sl} &= v \cdot (\cot\theta_{\max} - \cot\alpha) = (1 + \cot\alpha) \cdot \frac{\beta_w}{2} \cdot \\ &\cdot (1 - \cot\alpha) = \beta_w \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot \text{sen}^2\alpha} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Nel caso di armature trasversali verticali ($\alpha = 90^\circ$):

$$a_{sl} = \beta_w/2.$$

L'interpretazione geometrica della formula è fornita dalla parte destra della Figura 19:

$$a_{sl} = \beta_w - \frac{\beta_w/2 \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha} = \beta_w - \frac{a_{sw}^*}{\text{sen}\alpha} \quad (35)$$

Vale pertanto la costruzione fondamentale della

Figura 18
Dimostrazione della costruzione geometrica che determina $a_{sl} = A_{sl}/z$ per elementi normalmente armati.

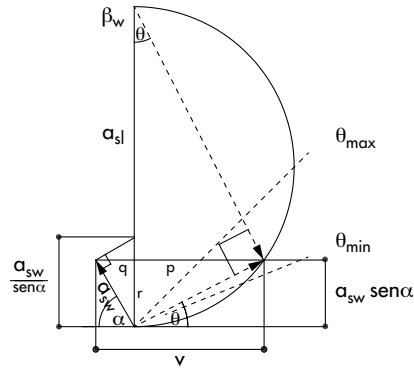


Figura 19
Costruzioni geometriche che determinano $a_{sl} = A_{sl}/z$ per elementi debolmente armati a taglio ($\theta = \theta_{min}$) e per elementi fortemente armati a taglio ($\theta = \theta_{max}$).

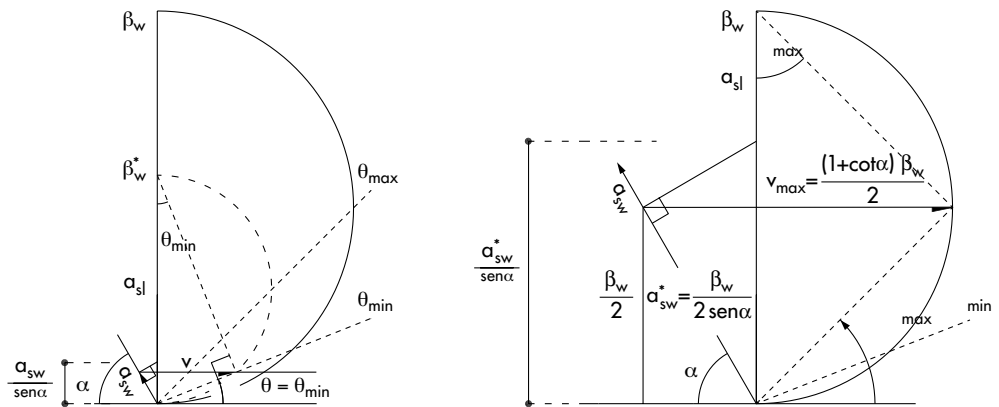


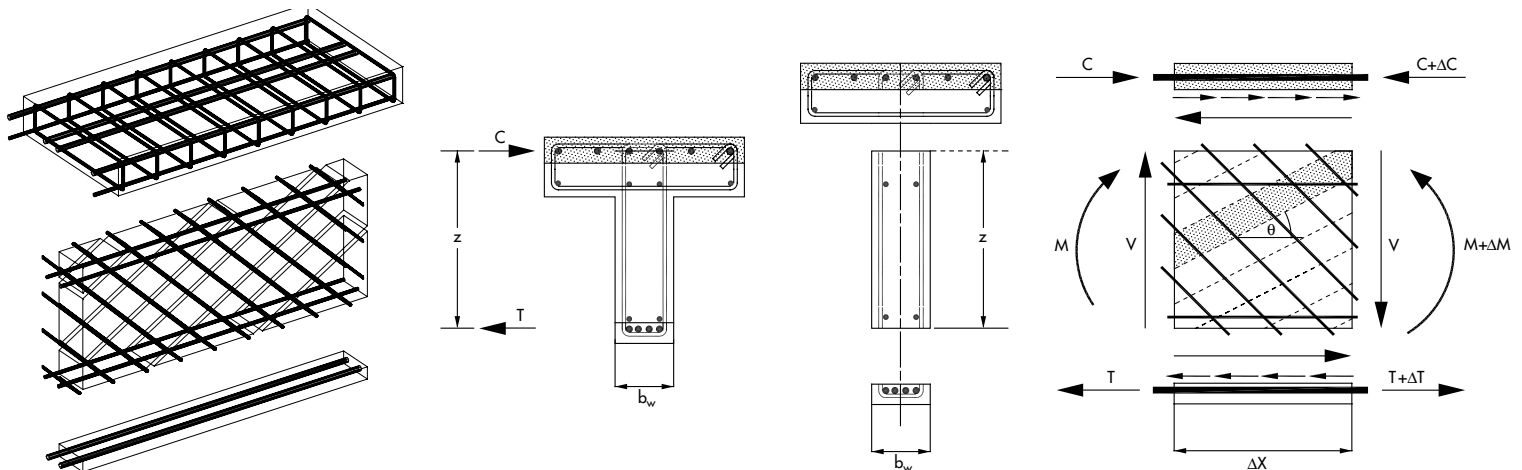
Figura 6, utilizzando la minor densità di armatura a_{sw}^* ; in questo caso l'acciaio raggiunge una tensione minore rispetto alla resistenza a trazione: $\sigma_s = f_{y,d} \cdot (a_{sw}^*/a_{sw})$.

3.2 Simmetria dei tagli omogeneizzati

La Figura 20 mostra un tratto di trave con armature trasversali che, generalmente, possono essere inclinate. In questo articolo ci limitiamo a considerare il caso di travi rettilinee. Metodi progettuali per verificare e dimensiona-

re travi curvilinee e angoli di telaio sono trattati nell'autorevole testo già citato (Muttoni et al., 1997), e anche nella pubblicazione *Éléments en béton armé soumis à une combinaison de flexion, effort tranchant et forces de déviation*, liberamente scaricabile da internet (Campana S., 2013). Inoltre assumiamo che gli elementi abbiano braccio di leva interna z costante: in questo caso gli sforzi di taglio sono generati unicamente dalla variazione del momento flettente (nella direzione dell'asse longitudinale della tra-

Figura 20
Separazione ideale del pannello d'anima soggetto a sole azioni taglianti.



ve) che si riflette direttamente in una variazione delle intensità delle risultanti interne di trazione e di compressione.

Pensiamo di separare idealmente il corrente compresso e il corrente teso dall'anima della trave e consideriamo il pannello bidimensionale rettangolare alto come il braccio della coppia interna z e lungo Δx .

Consideriamo un tratto di trave di lunghezza Δx : per l'equilibrio alla rotazione, la variazione del momento ΔM genera la coppia di forze V , definite forze di taglio: $V = \Delta M / \Delta x$ (con un passaggio al limite ritroveremo il noto risultato per cui il diagramma del taglio è la derivata della funzione momento: $V = dM/dx$).

Su ciascuna delle facce verticali del pannello, a questa forza complessiva V corrisponde una tensione *media* tangenziale verticale τ_w pari a:

$$\tau_w = \frac{V}{b_w \cdot z} = \frac{\Delta M}{\Delta x} \cdot \frac{1}{b_w \cdot z} \quad (36)$$

Su ciascuna delle facce orizzontali del pannello agirà una forza pari alla differenza tra le risultanti di compressione (o di trazione) a destra e a sinistra del tronco di trave:

$$\Delta C = \Delta T = \frac{\Delta M}{z} \quad (37)$$

Su queste facce orizzontali la tensione *media* tangenziale orizzontale τ_1 è pari a:

$$\tau_1 = \frac{\Delta C}{b_w \cdot \Delta x} = \frac{\Delta T}{b_w \cdot \Delta x} = \frac{\Delta M}{z} \cdot \frac{1}{b_w \cdot \Delta x} \quad (38)$$

Ritroviamo così il noto risultato della simmetria delle tensioni medie tangenziali: $\tau_w = \tau_1 = \tau$
Quando si considera un pannello lungo z (cioè quadrato) risultano uguali anche le risultanti.

Questa simmetria si ritrova anche quando si considerano le forze agenti per unità di lunghezza orizzontale e verticale.

$$\tau \cdot b_w = \frac{V}{z} = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} \cdot f_{yd} = v \cdot f_{yd} \quad (39)$$

Abbiamo così dimostrato la simmetria dei tagli omogeneizzati v .

3.3 Utilizzo di diagrammi adimensionali in letteratura

Figure circolari analoghe a quelle da noi introdotte compaiono da molto tempo in letteratura, ma applicate al solo caso di staffe verticali. Queste figure sono anche utilizzate per verificare che il dominio adimensionale è a favore di sicurezza considerando i risultati sperimentali di molti autori. A destra della Figura 21 abbiamo disegnato un diagramma di questo tipo, riportando, per semplicità e a titolo di esempio, solo alcuni risultati sperimentali, che il lettore può confrontare con una figura analoga di un noto commentario dell'Eurocodice 2 (2008), Figura 6.30.

Nel diagramma sia l'ascissa sia l'ordinata sono adimensionali: in ascissa compare la percentuale meccanica di armatura trasversale

$$\frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot s \cdot v \cdot f_{cd}} \quad (40)$$

e in ordinata il taglio resistente adimensionale:

$$\frac{V}{b_w \cdot z \cdot v \cdot f_{cd}} \quad (41)$$

A sinistra della Figura 21, abbiamo riportato il nostro diagramma nelle variabili omogeneizzate v e a_{sw} tenendo conto dei limiti imposti all'inclinazione θ .

È interessante osservare che il diagramma adi-

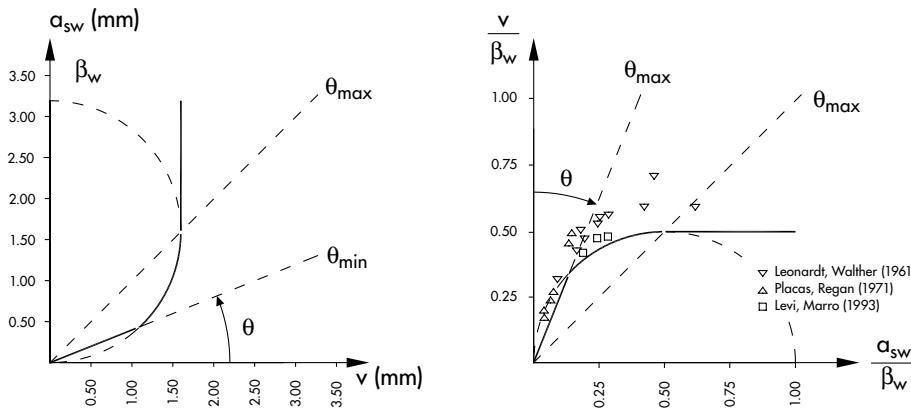


Figura 21
Diagrammi nelle variabili omogeneizzate e nelle variabili adimensionali.

mentoriale si può ottenere mediante l'inversione delle variabili omogeneizzate (simmetria rispetto alla bisettrice del quadrante coincidente con la semiretta del limite $\theta_{max} = 45^\circ$), dividendo poi sia le ascisse sia le ordinate per l'armatura equivalente β_w .

Infatti:

$$\frac{a_{sw}}{\beta_w} = \frac{\frac{A_{sw}}{s}}{b_w \cdot \frac{v \cdot f_{cd}}{f_{yd}}} = \frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot s \cdot v \cdot f_{cd}}$$

(42)

$$\frac{v}{\beta_w} = \frac{\frac{V}{z \cdot f_{yd}}}{b_w \cdot \frac{v \cdot f_{cd}}{f_{yd}}} = \frac{V}{b_w \cdot z \cdot v \cdot f_{cd}}$$

La rappresentazione della *condizione di duttilità* mediante una curva fissa, conseguenza del procedimento di adimensionalizzazione, non consente al progettista di valutare immediatamente l'effetto singolo delle grandezze a sua disposizione.

Il *metodo dell'armatura equivalente* qui proposto supera questa difficoltà perchè, anzichè adimensionalizzare prevede di *omogeneizzare* il taglio e la larghezza dell'anima alle dimensioni di densità di armatura, rendendo più agevole il confronto tra i meccanismi resistenti conseguenti alle scelte di progetto (vedi Figure 32 e 33).

Inoltre i diagrammi adimensionali, su tutti i testi da noi consultati, non utilizzano la semplice

costruzione geometrica vista ai punti precedenti che ne estende l'uso anche al caso di armatura trasversale inclinata.

Suggeriamo invece di considerare la convenienza di rappresentare in un unico diagramma *anche i risultati sperimentali derivanti da elementi con armature trasversali diversamente inclinate*, così da avere sotto un'unica visuale di insieme (Figura 22) la messe completa dei risultati sperimentali oggetto del confronto con il diagramma adimensionale teorico (unico) derivante dalla teoria del traliccio ad inclinazione variabile.

4. Staffe verticali: formule di verifica e di progetto nello spazio delle variabili omogeneizzate

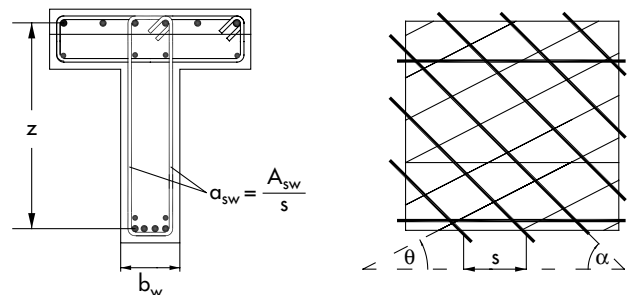
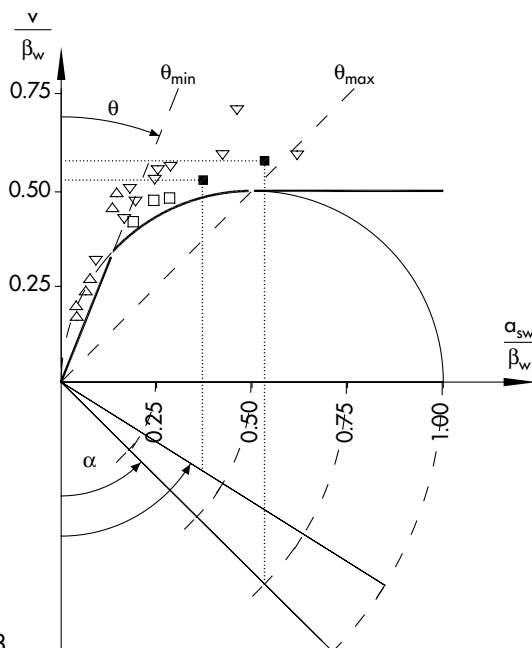
La costruzione geometrica con disegno manuale fondata sull'armatura equivalente, se eseguita in una scala grafica adatta ad una lettura agevole, permette un calcolo immediato sufficientemente preciso per verificare e progettare a taglio gli elementi in cemento armato. Come già osservato, il metodo dà risultati del tutto sovrapponibili a quelli del calcolo analitico, se il disegno è invece eseguito al computer.

Poichè nello spazio delle variabili omogeneizzate le formule relative alla condizione di duttilità sono semplici, può essere comunque utile fornire "formule dirette", facilmente implementabili su foglio elettronico.

Le variabili in gioco sono 6:

- due angoli α , θ ;
- quattro lunghezze β_w , v , a_{sw} , a_{sl} .

Figura 22
Estensione dell'uso del diagramma adimensionale per armature trasversali inclinate.



$$v = \frac{V}{z f_{yd}} \quad \beta_w = b_w \frac{v f_{cd}}{f_{yd}}$$

Nel caso di staffe verticali ($\alpha = 90^\circ$) le variabili sono 5, legate, in condizioni di duttilità, dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} a_{sw} + a_{sl} &= \beta_w \\ a_{sw} \cdot a_{sl} &= v^2 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{v}{a_{sl}} = \frac{a_{sw}}{v} = \tan\theta, \theta_{\min} = 21.8^\circ \leq \theta \leq \theta_{\max} = 45^\circ$$

Per comodità del lettore riportiamo lo schema grafico valido per armatura trasversale verticale e traduciamo graficamente i problemi duali di verifica e di progetto.

4.1 Formula unificata di verifica (v incognito)

Consideriamo il caso più usuale in cui sono note la larghezza dell'anima b_w e la densità d'armatura trasversale a_{sw} . In condizioni di duttilità si ha:

$$v = \sqrt{a_{sw} \cdot (\beta_w - a_{sw})} \quad (44)$$

Va sempre eseguito il controllo di duttilità, ricavando l'angolo in base alla $a_{sw}/v = \tan\theta$.

Esempio numerico di verifica (Angotti et al., 2011), es. 8.1.4.3, pag. 421.

Sono note la larghezza dell'anima $b_w = 150$ mm e la densità dell'armatura trasversale.

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 8}{150} = \frac{2 \cdot 50}{150} = 0.667 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad (45)$$

Inoltre $z = 500$.

$$f_{ck} = 20 \rightarrow f_{cd} = 11.33 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \quad (46)$$

$$b_w = \frac{0.5 \cdot 11.33}{391.3} \cdot 150 = 2.172 \text{ mm}$$

Operando graficamente, dal disegno della Figura 24, si ricava:

$$v = 1.00 \rightarrow V = v \cdot z \cdot f_{yd} = 1.00 \cdot 500 \cdot 391.3 \cong \cong 196 \text{ kN} \text{ e } \theta \cong 33^\circ \quad (47)$$

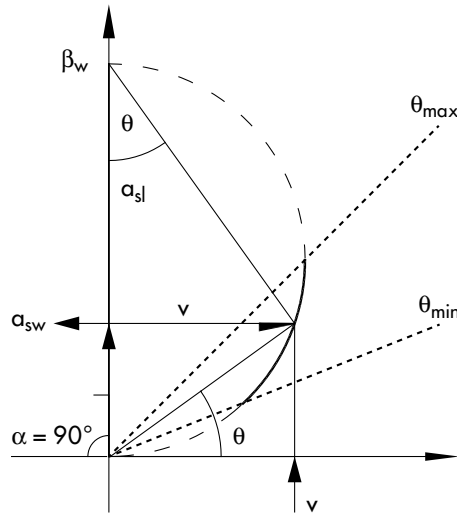
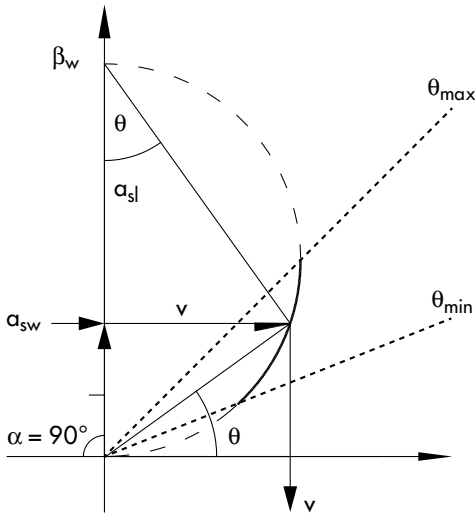


Figura 23 Traduzione grafica dei problemi di verifica e di progetto (staffe verticali).

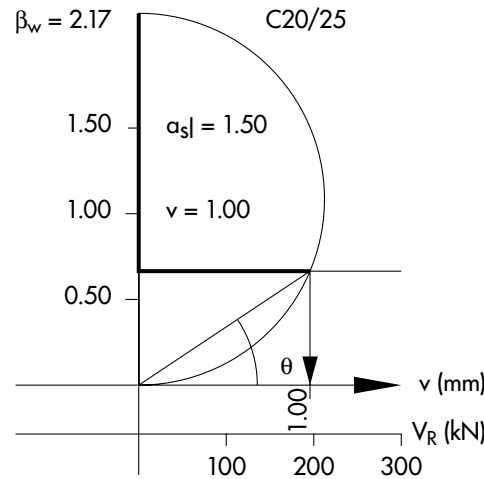
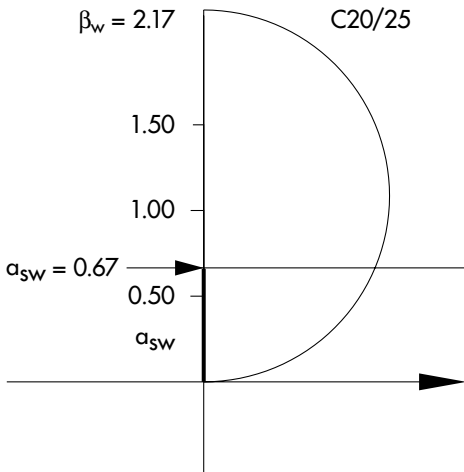


Figura 24 Esempio di verifica immediata con metodo grafico.

Applicando la formula di verifica si ricava:

$$v = \sqrt{a_{sw} \cdot (\beta_w - a_{sw})} = \sqrt{0.667 \cdot (2.172 - 0.667)} = 1.002 \rightarrow v = v \cdot z \cdot f_{yd} = 1.002 \cdot 500 \cdot 391.3 = 196.025 \text{ kN} \quad (48)$$

Controllo di duttilità:

$$\tan \theta = \frac{a_{sw}}{v} = \frac{0.667}{1.002} = 0.666 \rightarrow \theta = 33.650$$

$$21.8^\circ \leq \theta = 33.650 \leq 45^\circ$$

(49)

Armatura longitudinale:

$$a_{sl} = \beta_w - a_{sw} = 2.172 - 0.667 = 1.505 \rightarrow A_{sl} = a_{sl} \cdot z = 1.505 \cdot 500 = 752 \text{ mm}^2 \rightarrow \Delta A_{sl} = \frac{A_{sl}}{2} = 376 \text{ mm}^2$$

(50)

L'armatura longitudinale da aggiungere in zona tesa coincide con quella che si ottiene dalla formula:

$$\Delta A_{sl} = \frac{1}{2} \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \cdot \frac{V}{f_{yd}} = \frac{1}{2} \cdot (\cot 33.650^\circ - 0) \cdot \frac{196 \cdot 10^3}{391.3} = 376 \text{ mm}^2$$

(51)

Come mostra la Figura 24, i valori del taglio resi-

stente V_R , invece di essere calcolati moltiplicando per $z \cdot f_{yd}$ i corrispondenti valori dei tagli omogeneizzati, possono anche essere direttamente *stimati graficamente*. Allo scopo è sufficiente amplificare la scala del taglio omogeneizzato per lo stesso fattore $z \cdot f_{yd}$.

Nello spazio delle variabili omogeneizzate il controllo della duttilità può essere eseguito anche *automaticamente* se si adotta l'artificio di assumere il valore *minimo* del taglio resistente tra la funzione lineare ($v = a_{sw} \cdot \cot \theta$, $\cot \theta = 2.5$) e la funzione circolare che esprime la condizione di duttilità (Figura 25).

Taglio resistente:

$$\begin{aligned} - \text{ se } a_{sw} \leq \frac{\beta_w}{2}, v &= \min \left[2.5 \cdot a_{sw}; \sqrt{a_{sw} \cdot (\beta_w - a_{sw})} \right]; \\ - \text{ se } a_{sw} > \frac{\beta_w}{2}, v &= \frac{\beta_w}{2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Inclinazione dei puntoni:

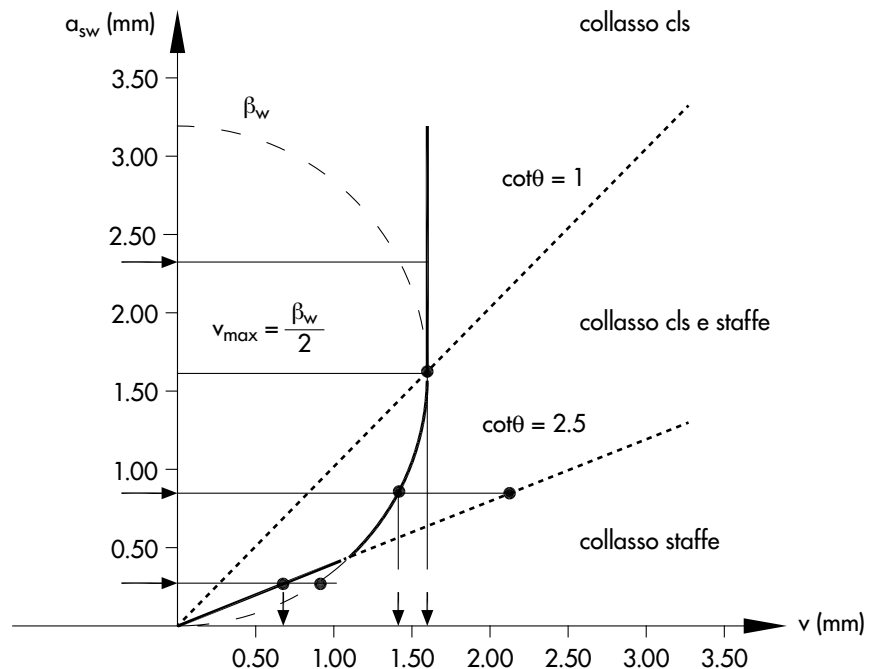
$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw}}{v} \leq 45^\circ \quad (53)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (54)$$

Nel caso dell'esempio appena svolto, il calcolo analitico nello spazio delle variabili omogeneizzate si organizza nel modo seguente:

Figura 25
Controllo automatico della duttilità in problemi di verifica: staffe verticali.



$$a_{sw} = 0.667 \leq \frac{\beta_w}{2} = \frac{2.172}{2}$$

$$v = \min\left(2.5 \cdot 0.667; \sqrt{0.667 \cdot (2.172 - 0.667)}\right) =$$

$$= \min(1.668; 1.002) = 1.002$$

$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw}}{v} = \arctan \frac{0.667}{1.002} =$$

$$= 33.650 \leq 45^\circ$$

$$a_{sl} = v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) = 1.002 \cdot (\cot 33.650 - 0) =$$

$$= 1.505 \rightarrow \Delta A_{sl} = \frac{a_{sl} \cdot Z}{2} = 376 \text{ mm}^2$$

(55)

4.2 Formula unificata di progetto (v noto)

Consideriamo sempre il caso più usuale in cui è nota la larghezza dell'anima b_w . Dalla Figura 26 si può ricavare immediatamente che:

$$a_{sw} = \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2}$$

(56)

Come esempio numerico, possiamo invertire l'esempio di verifica appena visto, assumendo noto il taglio.

$$v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{196 \cdot 10^3}{500 \cdot 391,3} = 1.00$$

$$a_{sw} = \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2} = \frac{2.172}{2} -$$

(57)

$$- \sqrt{\frac{2.172^2}{4} - 1.002^2} = 1.086 - 0.419 = 0.667$$

Anche nei problemi di progetto, il controllo della duttilità può essere eseguito *automaticamente*, con l'artificio di assumere il valore *massimo* tra la funzione lineare ($a_{sw} = v/\cot\theta$, $\cot\theta = 2.5$) e la funzione circolare di duttilità.

Osserviamo che se $v > \beta_w/2$ si deve aumentare la larghezza dell'anima.

Densità di armatura trasversale:

$$a_{sw} = \max\left[\frac{v}{2.5}; \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2}\right] \quad v \leq \frac{\beta_w}{2} \quad (58)$$

Inclinazione dei puntoni:

$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw}}{v} \leq 45^\circ \quad (59)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) \quad (60)$$

5. Staffe inclinate: formule di verifica e di progetto nello spazio delle variabili omogeneizzate

Per comodità del lettore riportiamo lo schema grafico generale valido per armatura trasversale comunque inclinata e traduciamo graficamente i problemi duali di verifica e di progetto.

5.1 Problemi di verifica (v incognito)

Nel caso più frequente di verifica, note la larghezza dell'anima e la densità di armatura trasversale, ecco la formula (facilmente ricavabile dall'interpretazione geometrica del metodo dell'armatura equivalente) che dà immediatamente il taglio resistente omogeneizzato:

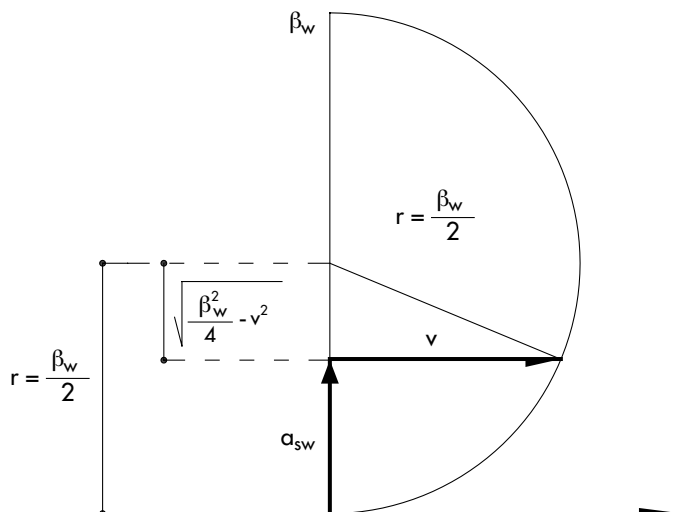


Figura 26 Interpretazione geometrica della formula che esprime a_{sw} in termini di v : staffe verticali.

Figura 27
Controllo automatico della duttilità in problemi di progetto: staffe verticali.

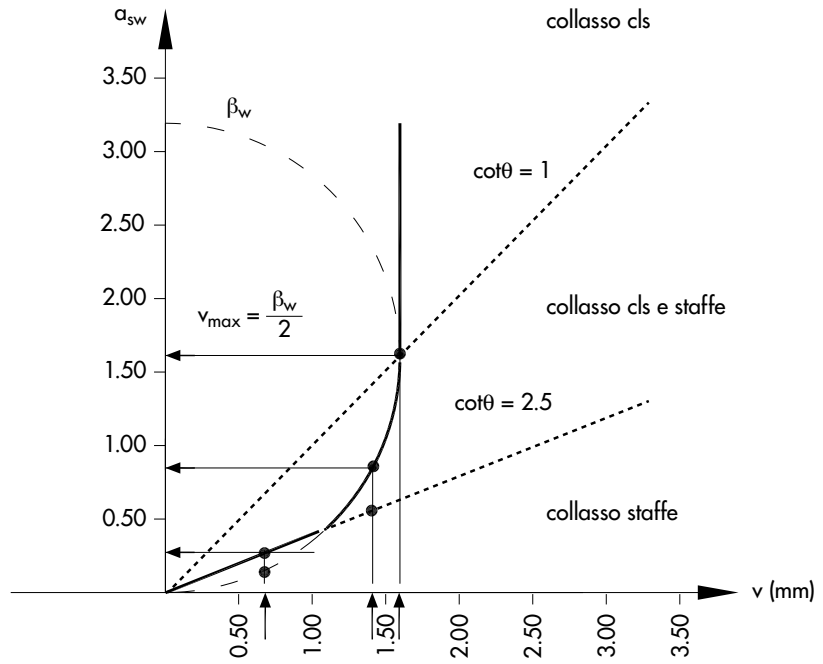


Figura 28
Traduzione grafica dei problemi di verifica e di progetto: staffe inclinate.

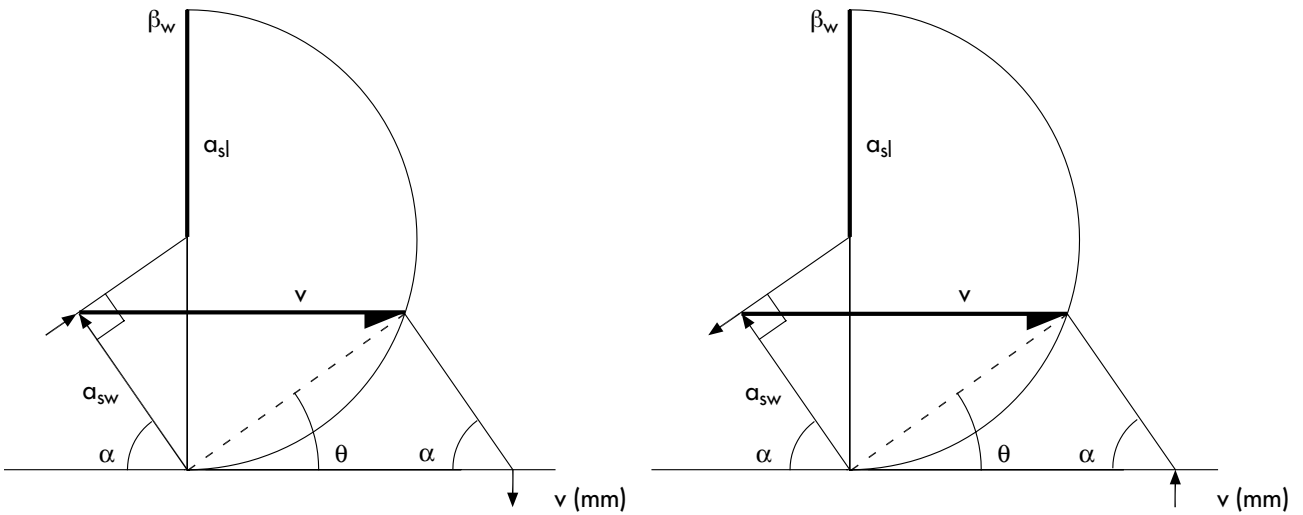
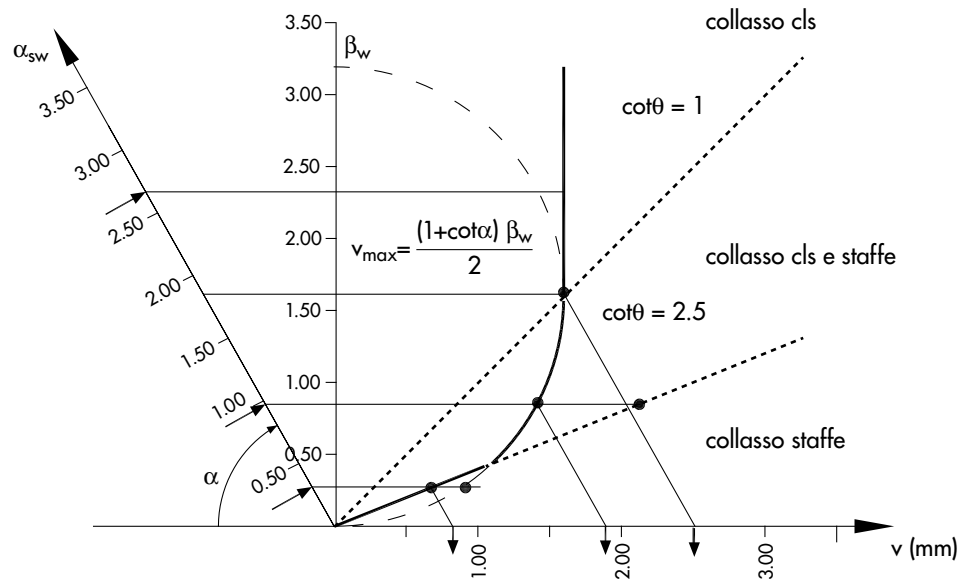


Figura 29
Controllo automatico della duttilità in problemi di verifica: staffe inclinate (a destra).



$$v = a_{sw} \cdot \cos\alpha + \sqrt{a_{sw} \cdot \sin\alpha \cdot (\beta_w - a_{sw} \cdot \sin\alpha)} \quad (61)$$

Va sempre eseguita la verifica di duttilità ricorrendo θ dalla seguente equazione:

$$\tan\theta = \frac{a_{sw} \cdot \sin\alpha}{v - a_{sw} \cdot \cos\alpha} \quad (62)$$

Anche nel caso di staffe inclinate il controllo di duttilità può essere svolto *automaticamente*:

Taglio resistente:

$$\begin{aligned} - \text{ se } a_{sw} \cdot \sin\alpha \leq \frac{\beta_w}{2}, v = \min \left[a_{sw} \cdot (\cos\alpha + 2.5 \cdot \sin\alpha); \right. \\ \left. a_{sw} \cdot \cos\alpha + \sqrt{a_{sw} \cdot \sin\alpha \cdot (\beta_w - a_{sw} \cdot \sin\alpha)} \right]; \\ - \text{ se } a_{sw} \cdot \sin\alpha > \frac{\beta_w}{2}, v = \frac{\beta_w}{2} \cdot (1 + \cos\alpha). \end{aligned} \quad (63)$$

Inclinazione dei puntoni:

$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw} \cdot \sin\alpha}{v - a_{sw} \cdot \cos\alpha} \leq 45^\circ \quad (64)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) \quad (65)$$

Esempio numerico di verifica (Angotti et al., 2011), es. 8.1.4.7, pag. 422.

$$z = 500 \text{ mm} \quad b_w = 150 \text{ mm} \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} f_{ck} = 40 \rightarrow f_{cd} = 22.66 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \\ = \frac{0.5 \cdot 22.66}{391.3} \cdot 150 = 4.343 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 12}{150} = \frac{2 \cdot 113.1}{150} = 1.508 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad (66)$$

Taglio resistente:

$$a_{sw} \cdot \sin\alpha = 1.508 \cdot \sin 45^\circ < \frac{\beta_w}{2} = \frac{4.343}{2}$$

$$v = \min \left[a_{sw} \cdot (\cos\alpha + 2.5 \cdot \sin\alpha); a_{sw} \cdot \cos\alpha + \sqrt{a_{sw} \cdot \sin\alpha \cdot (\beta_w - a_{sw} \cdot \sin\alpha)} \right]$$

$$v = \min \left[1.508 \cdot (\cos 45 + 2.5 \cdot \sin 45); 1.508 \cdot \cos 45 + \sqrt{1.508 \cdot \sin 45 \cdot (4.343 - 1.508 \cdot \sin 45)} \right]$$

$$= \min [3.74; 1.066 + 1.869] = 2.935 \rightarrow V = v \cdot z \cdot f_{yd} = 2.935 \cdot 500 \cdot 391.3 \approx 574 \text{ kN}$$

(67)

Inclinazione dei puntoni:

$$\tan\theta = \frac{1.508 \cdot \sin 45^\circ}{2.92 - 1.508 \cdot \cos 45^\circ} = 0.571 \rightarrow \theta = 29.710^\circ \quad (68)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$\begin{aligned} a_{sl} = v \cdot (\cot\theta - \cot\alpha) = 2.935 \cdot (\cot 29.710^\circ - \cot 45^\circ) = \\ = 2.208 \text{ mm}^2/\text{mm} \end{aligned} \quad (69)$$

5.2 Formula unificata di progetto (v noto)

Consideriamo la Figura 30 a pagina successiva e applichiamo il teorema di Euclide al triangolo con ipotenusa β_w :

$$(v - a_{sw} \cdot \cos\alpha)^2 = a_{sw} \cdot \sin\alpha \cdot (\beta_w - a_{sw} \cdot \sin\alpha) \quad (70)$$

Otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$a_{sw}^2 + a_{sw} (-2 \cdot v \cdot \cos\alpha - \beta_w \cdot \sin\alpha) + v^2 = 0 \quad (71)$$

la radice di valore inferiore è:

$$\begin{aligned} a_{sw} = v \cdot \cos\alpha + \frac{\beta_w}{2} \cdot \sin\alpha - \\ - \sqrt{\frac{(2 \cdot v \cdot \cos\alpha + \beta_w \cdot \sin\alpha)^2}{4} - v^2} \end{aligned} \quad (72)$$

Controllo di duttilità:

$$\tan\theta = \frac{a_{sw} \cdot \sin\alpha}{v - a_{sw} \cdot \cos\alpha} \quad 21.8^\circ \leq \theta \leq 45^\circ \quad (73)$$

Osserviamo che se $v > \beta_w/2 \cdot (1 + \cot\alpha)$ si deve aumentare la larghezza dell'anima (vedi Figura 31 a pagina successiva).

Quando le staffe sono verticali ($\alpha = 90^\circ$) si riottiene la formula:

$$a_{sw} = \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2} \quad (74)$$

Anche nel problema di progetto per le staffe inclinate, il controllo di duttilità può essere svolto automaticamente:

Densità di armatura trasversale:

$$\begin{aligned} a_{sw} = \max \left[\frac{v}{\cos\alpha + 2.5 \cdot \sin\alpha}; v \cdot \cos\alpha + \frac{\beta_w}{2} \cdot \sin\alpha - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{(2 \cdot v \cdot \cos\alpha + \beta_w \cdot \sin\alpha)^2}{4} - v^2} \right] v \leq \frac{\beta_w}{2} \cdot (1 + \cot\alpha) \end{aligned} \quad (75)$$

Figura 30
Interpretazione geometrica della formula che esprime a_{sw} in termini di v : staffe inclinate.

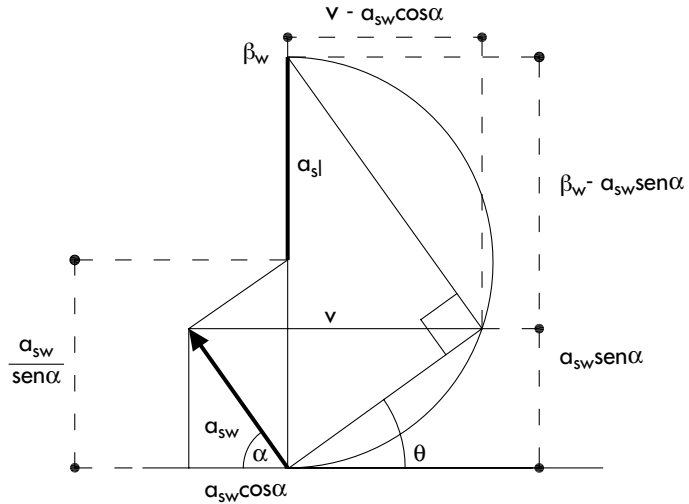
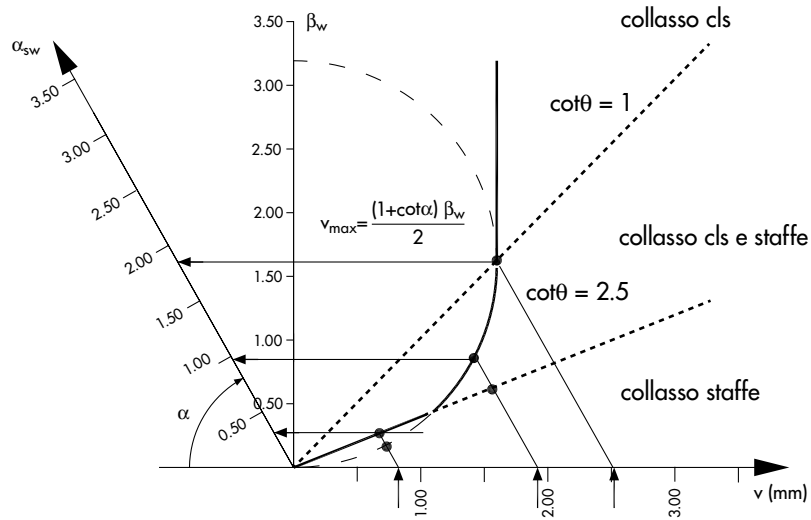


Figura 31
Controllo automatico della duttilità in problemi di progetto: staffe inclinate.



Inclinazione dei puntoni:

$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw} \cdot \sin \alpha}{v - a_{sw} \cdot \cos \alpha} \leq 45^\circ \quad (76)$$

$$v = 750 \text{ kN} \rightarrow v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{750 \cdot 10^3}{675 \cdot 391.3} = 2.840 \text{ mm} \quad (78)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \quad (77)$$

Densità di armatura trasversale:

$$v = 2.840 \leq \frac{\beta_w}{2} \cdot (1 + \cot \alpha) = \frac{5.791}{2} \cdot (1 + \cot 45^\circ) = 5.791$$

Esempio numerico di verifica (Angotti et al., 2011), es. 8.1.5.4, pag. 425).

Invertiamo l'esempio risolto graficamente al punto 2.1 (Figura 1) prendendo come dato di input il taglio $V = 750 \text{ kN}$.

$$z = 675 \text{ mm} \quad b_w = 200 \text{ mm} \quad \alpha = 45^\circ$$

$$f_{ck} = 40 \rightarrow f_{cd} = 22.66 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 22.66}{391.3} \cdot 200 = 5.791 \text{ mm}$$

$$\frac{v}{\cos \alpha + 2.5 \cdot \sin \alpha} = \frac{2.840}{\cos 45^\circ + 2.5 \sin 45^\circ} = 1.148$$

$$v \cdot \cos \alpha + \frac{\beta_w}{2} \cdot \sin \alpha - \sqrt{\frac{(2 \cdot v \cdot \cos \alpha + \beta_w \cdot \sin \alpha)^2}{4} - v^2} =$$

$$= 2.840 \cdot \cos 45^\circ + \frac{5.791}{2} \cdot \sin 45^\circ -$$

$$- \sqrt{\frac{(2 \cdot 2.840 \cdot \cos 45^\circ + 5.791 \cdot \sin 45^\circ)^2}{4} - 2.840^2} =$$

$$= 2.008 + 2.047 - 2.895 = 1.160$$

$$a_{sw} = \max [1.148; 1.160] = 1.160 \quad (79)$$

Inclinazione dei puntoni:

$$\tan \theta = \frac{a_{sw} \cdot \text{sen} \alpha}{v - a_{sw} \cdot \text{cos} \alpha} = \frac{1.160 \cdot \text{sen} 45}{2.840 - 1.160 \cdot \text{cos} 45} = \frac{0.820}{2.020} = 0.406 \rightarrow \theta = 22.103^\circ \quad 21.8^\circ \leq \theta \leq 45^\circ \quad (80)$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) = 2.840 \cdot (\cot 22.103 - \cot 45) = 4.153. \quad (81)$$

6. Verifica immediata del taglio resistente per diverse scelte dell'armatura trasversale

La procedura grafica fondata sull'armatura equivalente è di aiuto al progettista perché permette di costruire facilmente un diagramma che confronta il taglio resistente per diverse scelte dell'armatura trasversale, anche considerando l'alternativa di inclinarla. La Figura 32 riporta il calcolo immediato del taglio resistente di quattro esempi numerici tratti dal libro già citato (Angotti et al., 2011), esempi 1, 3, 5, 7 del punto 8.1.4. La sezione in cemento armato ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$d = 550 \text{ mm} \rightarrow z = 0.9 \cdot d \cong 500 \text{ mm} \quad b_w = 150 \text{ mm} \quad (82)$$

L'inclinazione dell'armatura trasversale è pari a 90° (staffe verticali) per i primi tre casi e 45° per l'ultimo quarto caso.

Esempio 1 (es. 8.1.4.1, pag. 420). Collasso delle staffe: rottura duttile di elemento *debolmente* armato.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 20 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{(0.5 \cdot 11.33)}{391.3} \cdot 150 = 2.172 \text{ mm} \quad \alpha = 90^\circ, a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 6}{200} = \frac{2 \cdot 28.3}{200} = 0.283 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad (83)$$

- Calcolo grafico immediato: si ricava dalla Figura 32 che la verifica è al confine del limite $\cot \theta = 2.5$, confondendosi graficamente l'intersezione con la semiretta $\cot \theta = 2.5$ e con il cerchio di equivalenza;

$$v \cong 0.70 \rightarrow V \cong v \cdot z \cdot f_{yd} = 0.70 \cdot 500 \cdot 391.3 \cong 137 \text{ kN} \quad (84)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate:

$$a_{sw} = 0.283 \leq \frac{\beta_w}{2} = \frac{2.172}{2}, \quad (85)$$

$$v = \min [2.5 \cdot a_{sw}; \sqrt{a_{sw} \cdot (\beta_w - a_{sw})}] = \min [2.5 \cdot 0.283; \sqrt{0.283 \cdot (2.172 - 0.283)}] = \min [0.708; 0.731] = 0.708 \quad (86)$$

Esempio 3 (es. 8.1.4.3, pag. 421). Collasso calcestruzzo e staffe: condizione di duttilità -elemento *normalmente* armato.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 20 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 11.33}{391.3} \cdot 150 = 2.172 \text{ mm} \quad \alpha = 90^\circ, a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 8}{150} = \frac{2 \cdot 50}{150} = 0.67 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad (87)$$

- Calcolo grafico immediato (Figura 32):

$$v = 1.00 \rightarrow V = v \cdot z \cdot f_{yd} = 1.00 \cdot 500 \cdot 391.3 = 196 \text{ kN} \quad (88)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate: vedi esempio numerico di verifica al § 4.1.

Esempio 5 (es. 8.1.4.5, pag. 421). Collasso calcestruzzo: rottura fragile di elemento *fortemente* armato.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 20 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 11.33}{391.3} \cdot 150 = 2.172 \text{ mm} \quad \alpha = 90^\circ, a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 12}{150} = \frac{2 \cdot 113.1}{150} = 1.51 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad (89)$$

- Calcolo grafico immediato (Figura 32):

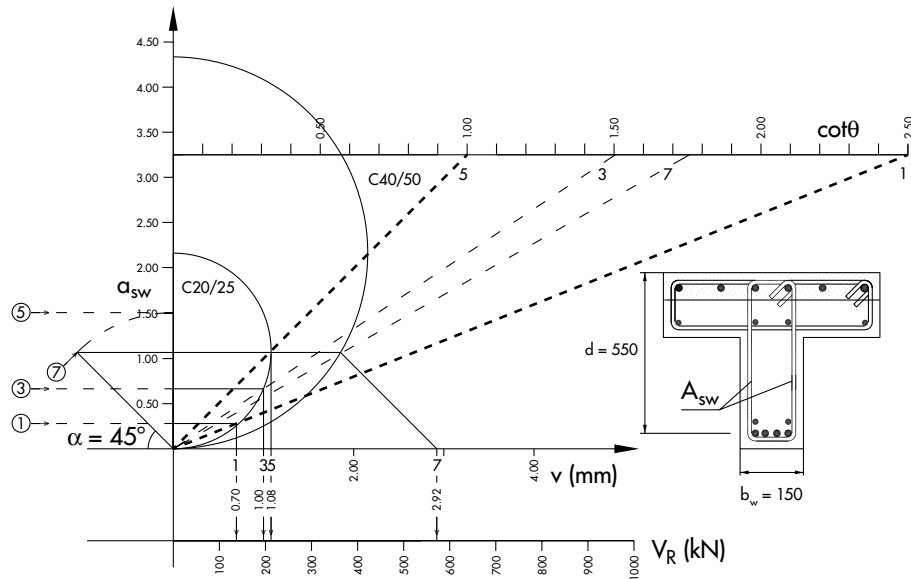
$$v = 1.08 \rightarrow V = v \cdot z \cdot f_{yd} = 1.08 \cdot 500 \cdot 391.3 = 211 \text{ kN} \quad (90)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate:

$$a_{sw} = 1.15 > \frac{\beta_w}{2} = \frac{2.172}{2}, v = \frac{\beta_w}{2} = \frac{2.172}{2} = 1.086 \quad (91)$$

Esempio 7 (es. 8.1.4.7, pag. 422). Collasso calcestruzzo e staffe: condizione di duttilità -elemento *normalmente* armato.

Figura 32
Calcolo immediato di
verifica per quattro valori
di densità di armatura
trasversale.



- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 40 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 22.66}{391.3} \cdot 150 = 4.343 \text{ mm}$$

$$\alpha = 45^\circ, a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} = \frac{2\phi 12}{150} = \frac{2 \cdot 113.1}{150} = 1.51 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

(92)

- Calcolo grafico immediato (Figura 32):

$$v = 2.92 \rightarrow V = v \cdot z \cdot f_{yd} = 2.92 \cdot 500 \cdot 391.3 = 571 \text{ kN}$$

(93)

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate: vedi esempio numerico di verifica al § 5.1.

Come mostra la Figura 32, i valori del taglio resistente V_R , invece di essere calcolati moltiplicando per $z \cdot f_{yd}$ i corrispondenti valori dei tagli omogeneizzati, possono anche essere stimati graficamente. Allo scopo è sufficiente amplificare la scala del taglio omogeneizzato per lo stesso fattore $z \cdot f_{yd}$. Anche la cotangente dell'angolo d'inclinazione dei puntoni compressi θ può essere stimata graficamente partendo dal valore unitario in corrispondenza di $\theta = 45^\circ$.

7. Progetto immediato dell'armatura trasversale per diversi valori del taglio agente

La Figura 33 riporta il calcolo immediato dell'armatura trasversale per quattro esempi numerici tratti dal libro già citato (Angotti et al., 2011), esempi 1, 2, 3, 4 del punto 8.1.5.

La sezione in cemento armato ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$d = 750 \text{ mm} \rightarrow z = 0.9 \cdot d = 675 \text{ mm} \quad b_w = 200 \text{ mm} \quad (94)$$

Per non appesantire il disegno, non abbiamo riportato le operazioni grafiche (immediate) per leggere la densità di armatura longitudinale a_{sl} , che applicano le costruzioni della Figura 18 o della Figura 19.

Da essa abbiamo ricavato la forza di trazione aggiuntiva al lembo teso della sezione, come fatto dagli autori del libro citato: $\Delta F_t = 1/2 \cdot a_{sl} \cdot z \cdot f_{yd}$. L'inclinazione dell'armatura trasversale è pari a 90° (staffe verticali) per i primi tre casi e 45° per l'ultimo quarto caso.

Esempio 1 (es. 8.1.5.1, pag. 423). Correzione della larghezza dell'anima insufficiente.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 20 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 11.33}{391.3} \cdot 200 = 2.895 \text{ mm}$$

(95)

$$\alpha = 90^\circ, V = 400 \text{ kN} \rightarrow v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{400 \cdot 10^3}{675 \cdot 391.3} = 1.514 \text{ mm}$$

(96)

- Calcolo grafico immediato: poiché la verticale condotta per $v = 1.51 \text{ mm}$ non interseca il cerchio di equivalenza corrispondente alla larghezza d'anima $b_w = 200 \text{ mm}$, occorre aumentare b_w . Procediamo, come nel libro citato, aumentando b_w da 200 a 220 mm:

$$\rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 11.33}{391.3} \quad (97)$$

$$\cdot 220 = 3.185 \text{ mm}$$

Si ricava dalla Figura 33:

$$a_{sw} = 1.10 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad a_{sl} = 2.09 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \rightarrow \Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot a_{sl} \cdot z \cdot f_{yd} = \frac{1}{2} \cdot 2.09 \cdot 675 \cdot 391.3 = 276 \text{ kN} \quad (98)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate: *Densità di armatura trasversale:*

$$a_{sw} = \max \left[\frac{v}{2.5}; \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2} \right] = \max \left[\frac{1.514}{2.5}; \frac{3.185}{2} - \sqrt{\frac{3.185^2}{4} - 1.514^2} \right] = \max [0.606; 1.099] = 1.099 \text{ mm}^2/\text{mm} \quad v \leq \frac{\beta_w}{2} \quad (99)$$

Inclinazione dei puntoni:

$$21.8^\circ \leq \theta = \arctan \frac{a_{sw}}{v} = \arctan \frac{1.099}{1.514} \quad (100) \\ = 35.976^\circ \leq 45^\circ$$

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) = 1.514 \cdot (\cot 35.976^\circ - 0) = 2.086 \text{ mm}^2/\text{mm} \quad (101)$$

- **Esempio 2** (es. 8.1.5.2, pag. 424). Collasso staffe: rottura duttile di elemento *debolmente* armato.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 40 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 22.66}{391.3} \cdot 200 = 5.791 \text{ mm} \quad (102)$$

$$\alpha = 90^\circ, V = 500 \text{ kN} \rightarrow v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{500 \cdot 10^3}{675 \cdot 391.3} = 1.893 \text{ mm} \quad (103)$$

- Calcolo grafico immediato (Figura 33):

$$a_{sw} = 0.76 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad a_{sl} = 4.73 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \rightarrow \Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot a_{sl} \cdot z \cdot f_{yd} = \frac{1}{2} \cdot 4.73 \cdot 675 \cdot 391.3 = 625 \text{ kN} \quad (104)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate:

Densità di armatura trasversale:

$$a_{sw} = \max \left[\frac{v}{2.5}; \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2} \right] = \max \left[\frac{1.893}{2.5}; \frac{5.791}{2} - \sqrt{\frac{5.791^2}{4} - 1.893^2} \right] = \max [0.757; 0.705] = 0.757 \quad v \leq \frac{\beta_w}{2} \quad (105)$$

Inclinazione dei puntoni: $\vartheta = 21.8^\circ \rightarrow \cot \vartheta = 2.5$, in quanto il massimo di a_{sw} è il primo dei due termini. *Densità di armatura longitudinale:*

$$a_{sl} = v \cdot (\cot \vartheta - \cot \alpha) = 1.893 \cdot (2.5 - 0) = 4.733 \text{ mm}^2/\text{mm} \quad (106)$$

Osserviamo che a_{sl} , in elementi debolmente armati, può anche essere calcolato (§3.1) con la formula:

$$a_{sl} = 6.25 \cdot a_{sw} = 6.25 \cdot 0.757 = 4.731 \quad (107)$$

- **Esempio 3** (es. 8.1.5.3, pag. 424). Collasso staffe: rottura duttile di elemento debolmente armato.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 60 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 34.00}{391.3} \cdot 200 = 8.689 \text{ mm} \quad (108)$$

$$\alpha = 90^\circ, V = 750 \text{ kN} \rightarrow v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{750 \cdot 10^3}{675 \cdot 391.3} = 2.840 \text{ mm} \quad (109)$$

- Calcolo grafico immediato (Figura 33):

$$a_{sw} = 1.14 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}, a_{sl} = 7.10 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \rightarrow \Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot a_{sl} \cdot z \cdot f_{yd} = \frac{1}{2} \cdot 7.10 \cdot 675 \cdot 391.3 = 938 \text{ kN} \quad (110)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate: *Densità di armatura trasversale:*

$$a_{sw} = \max \left[\frac{v}{2.5}; \frac{\beta_w}{2} - \sqrt{\frac{\beta_w^2}{4} - v^2} \right] = \max \left[\frac{2.840}{2.5}; \frac{8.689}{2} - \sqrt{\frac{8.689^2}{4} - 2.840^2} \right] = \max [1.136; 1.057] = 1.136 \quad v \leq \frac{\beta_w}{2} \quad (111)$$

Inclinazione dei puntoni: $\vartheta = 21.8^\circ \rightarrow \cot\vartheta = 2.5$, in quanto il massimo di a_{sw} è il primo dei due termini.

Densità di armatura longitudinale:

$$a_{sl} = v \cdot (\cot\vartheta - \cot\alpha) = 2.840 \cdot (2.5 - 0) = 7.100 \text{ mm}^2/\text{mm} \quad (112)$$

Osserviamo che a_{sl} , in elementi debolmente armati, può anche essere calcolato (§3.1) con la formula:

$$a_{sl} = 6.25 \cdot a_{sw} = 6.25 \cdot 1.136 = 7.100 \quad (113)$$

Esempio 4 (es. 8.1.5.4, pag. 425). Collasso calcestruzzo e staffe: rottura in condizioni di duttilità.

- Dati di progetto:

$$f_{ck} = 40 \rightarrow \beta_w = \frac{(v \cdot f_{cd})}{f_{yd}} \cdot b_w = \frac{0.5 \cdot 22.66}{391.3} \cdot 200 = 5.79 \text{ mm} \quad (114)$$

$$\alpha = 45^\circ, V = 750 \text{ kN} \rightarrow v = \frac{V}{z \cdot f_{yd}} = \frac{750 \cdot 10^3}{675 \cdot 391.3} = 2.84 \text{ mm} \quad (115)$$

- Calcolo grafico immediato (Figura 33):

$$a_{sw} = 1.16 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}, a_{sl} = 4.15 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \rightarrow \Delta F_t = \frac{1}{2} \cdot a_{sl} \cdot z \cdot f_{yd} = \frac{1}{2} \cdot 4.15 \cdot 675 \cdot 391.3 = 548 \text{ kN} \quad (116)$$

- Calcolo analitico nelle variabili omogeneizzate: vedi esempio numerico di progetto al § 5.2.

Come mostra la Figura 33, i valori della densità di armatura trasversale a_{sw} possono essere ricavati direttamente sulla base dei tagli resistenti di progetto. Allo scopo è sufficiente amplificare la scala del taglio omogeneizzato per il fattore $z \cdot f_{yd}$. Anche la cotangente dell'angolo d'inclinazione dei puntoni compressi θ può essere stimata graficamente partendo dal valore unitario in corrispondenza di $\theta = 45^\circ$.

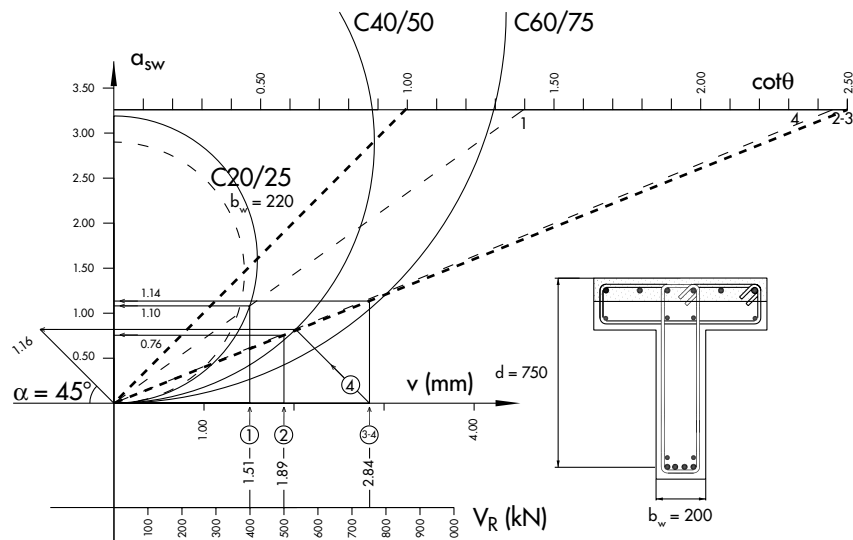
8. Calcolo immediato del taglio in elementi con più ordini di armature trasversali

Consideriamo una trave dotata di due ordini di armature trasversali disposte secondo le giaciture α_1 e α_2 . La Figura 34 mostra l'esempio di staffe verticali e di staffe inclinate. Anche in questo caso possiamo isolare il pannello dell'anima soggetto a sole forze di taglio.

Il metodo dell'armatura equivalente permette di affrontare semplicemente questo problema riducendolo alla composizione vettoriale dei vettori delle singole armature trasversali. La Figura 35 mostra il pannello armato soggetto alle forze di taglio. Esse si ottengono sommando tre effetti:

- le forze che agiscono sul pannello in calcestruzzo: i tagli sono corretti dalle forze opposte alle resistenze delle armature, così da ottenere due vettori risultanti allineati (tratteggiati in Figura 35), ovvero una situazione di sola compressione;
- le forze che agiscono sul primo ordine di armatura trasversale (nell'esempio in figura, in direzione verticale);
- le forze che agiscono sul secondo ordine di armatura trasversale e sull'armatura longitudinale d'anima.

Figura 33
Calcolo immediato di progetto dell'armatura trasversale per quattro valori del taglio agente.



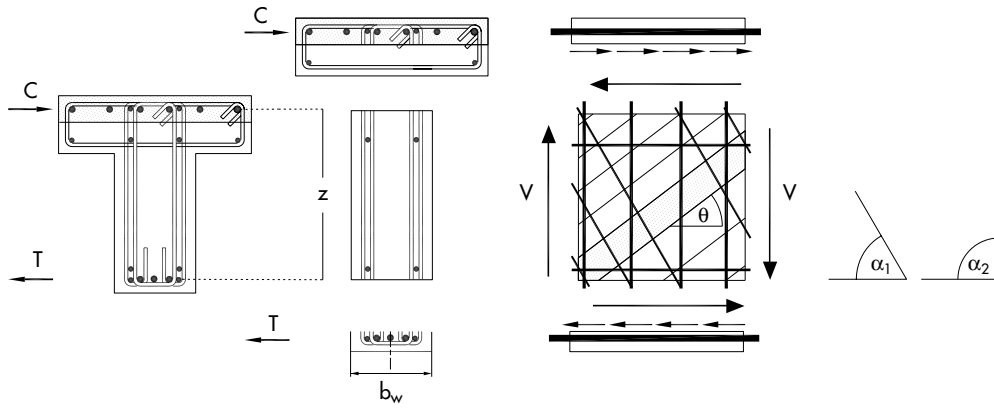


Figura 34
Separazione ideale del pannello d'anima soggetto a sole azioni taglianti (più ordini di staffe).

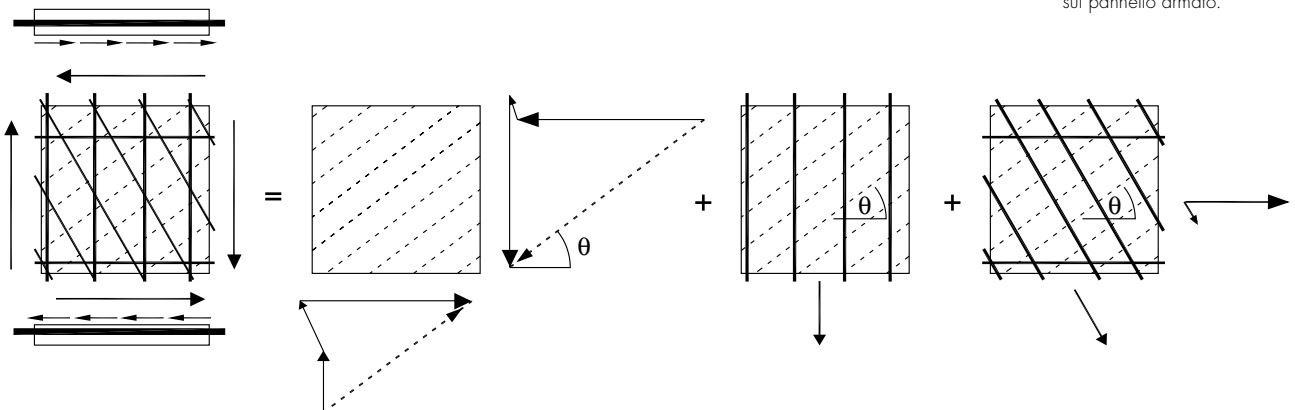


Figura 35
Scomposizione vettoriale delle forze di taglio agenti sul pannello armato.

8.1 Dimostrazione geometrica della liceità della composizione vettoriale delle densità di armature trasversali

Come mostra la Figura 36, al vettore somma dei vettori d'armatura 1 e 2 corrisponde un taglio resistente (omogeneizzato) ed un angolo θ . Dimostriamo che la composizione vettoriale è legittima in quanto possiamo suddividere β_w in due

quote β_{w1} e β_{w2} tali per cui, in corrispondenza dello stesso valore θ , si abbiano due tagli resistenti (omogeneizzati) v_1 e v_2 che sommati danno (Figura 37). Tramite la retta inclinata di θ con l'orizzontale, scomponiamo v nelle due quote v_1 e v_2 e in modo che $v_1 + v_2 = v$. Tramite la retta inclinata di θ con la verticale, scomponiamo β_w nelle due quote e β_{w1} e β_{w2} , in modo che $\beta_{w1} + \beta_{w2} = \beta_w$.

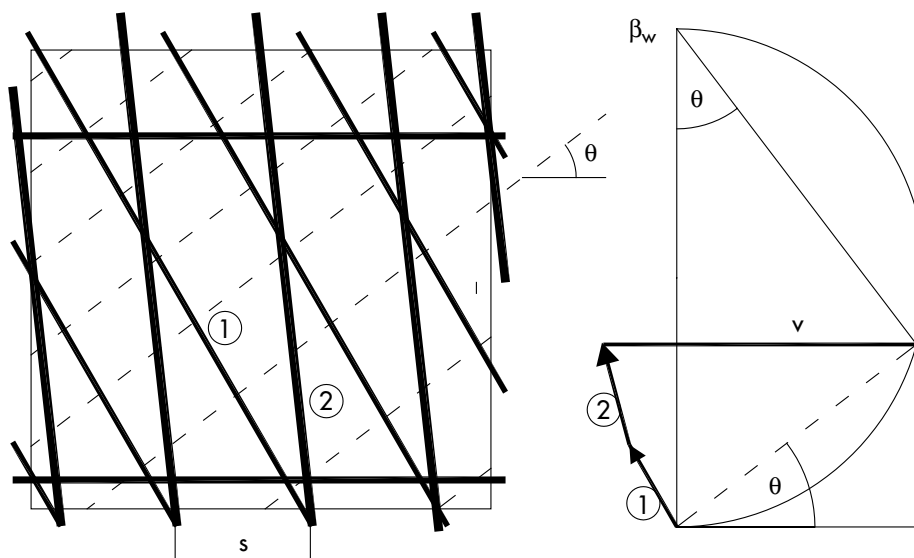
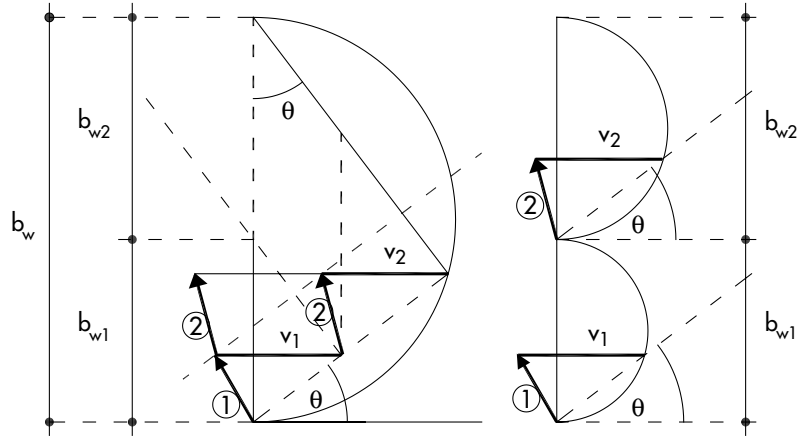


Figura 36
Composizione vettoriale delle densità di armature trasversali.

Figura 37
Suddivisione dell'armatura
equivalente β_w nelle quote
corrispondenti ai singoli
tralicci.



La parte di destra della Figura 37 conclude la dimostrazione perché mostra che β_{w1} è il diametro che corrisponde a v_1 e β_{w2} è il diametro che corrisponde a v_2 . In altre parole la larghezza d'anima b_w si può considerare suddivisa nelle due quote, ciascuna delle quali è relativa al singolo traliccio di Ritter Mörsch (quello di giacitura α_1 e quello di giacitura α_2) con la stessa θ :

$$b_{w1} = \beta_{w1} \cdot \frac{f_{yd}}{v \cdot f_{cd}} \quad b_{w2} = \beta_{w2} \cdot \frac{f_{yd}}{v \cdot f_{cd}} \quad (117)$$

Abbiamo ricostruito in Figura 41 il diagramma della pubblicazione citata relativo ad una percentuale meccanica di armatura trasversale (per ciascun ordine di staffe) pari a 0.2. Gli Autori definiscono la percentuale meccanica ω_w con riferimento ad un passo tra le staffe valutato nella direzione ortogonale alle armature:

$$\omega_w = \frac{A_{sw} \cdot f_{yd}}{b_w \cdot (s \cdot \sin \alpha) \cdot f_{cd}} \quad (118)$$

8.2 Esempio applicativo ad un caso studiato in letteratura

Ci riferiamo ad un'utilissima pubblicazione (Colajanni P., La Mendola L., Mancini G., Recupero A., 2011) che studia gli effetti dell'inclinazione, in presenza di due ordini d'armatura trasversale. Nella memoria sono stati considerati tre casi:

Pertanto, solo per staffe verticali, la percentuale meccanica ω_{sw} da noi introdotta (indipendente dall'inclinazione delle staffe, $\omega_{sw} = A_{sw} \cdot f_{yd} / b_w \cdot s \cdot f_{cd}$) coincide con ω_w . Per altre inclinazioni ω_{sw} risulta inferiore (Figure 42, 43, 44).

Nella pubblicazione citata, le tre curve sono state ottenute risolvendo numericamente un problema di programmazione non lineare nel quale la

Figura 38
Caso a: staffe con
inclinazioni opposte.

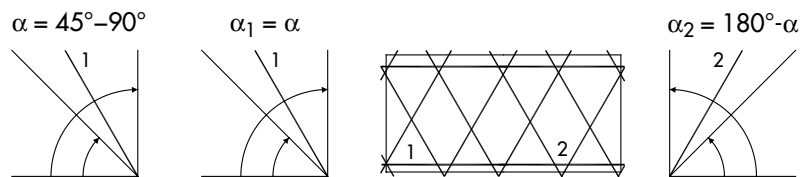


Figura 39
Caso b: una staffa verticale
e l'altra con inclinazione
sfavorevole ($\geq 90^\circ$).

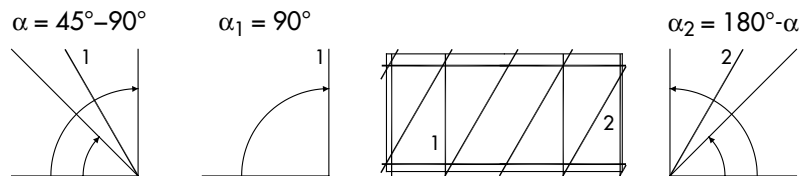
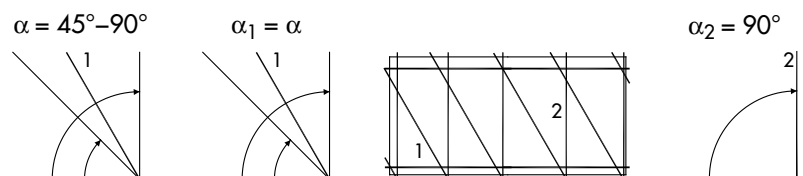


Figura 40
Caso c: una staffa verticale
e l'altra con inclinazione
favorevole ($\leq 90^\circ$).



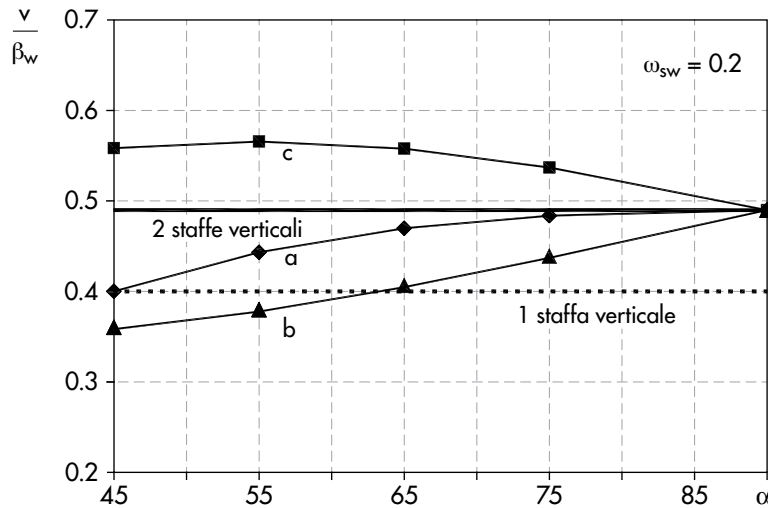


Figura 41
Diagrammi dei tagli resistenti adimensionali nei tre casi a, b, c.

funzione obiettivo da massimizzare è il taglio resistente adimensionale

$$\frac{V}{v \cdot f_{cd} \cdot z \cdot b_w} = \frac{v}{\beta_w} \quad (119)$$

Nel diagramma della Figura 41, le due righe orizzontali corrispondono al taglio resistente adimensionale in presenza di una staffa verticale (valore 0.40) e di due staffe verticali (valore = 0.49).

Osserviamo che la curva c dà un taglio resistente sempre superiore (solo al limite uguale) al taglio di due staffe verticali: è quindi sempre conveniente disporre una staffa con inclinazione $\leq 90^\circ$ (cioè inclinarla in modo da "tagliare" le fessure inclinate di ϑ).

La curva a dà un taglio che è sempre compreso tra quello di una sola staffa verticale quello di due staffe verticali: risultato ragionevole, considerata la simmetria.

La curva b (caso di una staffa verticale e una staffa con inclinazione $\geq 90^\circ$), per valori dell'inclinazione inferiori a circa 60° , darebbe tagli resistenti inferiori a quelli della sola staffa verticale (riprenderemo in seguito questa questione, che è in qualche modo paradossale). Nel prossimo punto, vedremo come il metodo dell'armatura equivalente ricostruisce graficamente, cioè senza nessun calcolo, tutti i risultati della pubblicazione.

8.3 Utilizzo del metodo grafico dell'armatura equivalente

Come visto, le tre curve sono relative al caso di percentuale meccanica (per ciascun ordine di staffe) pari a 0.2.

Volendo riottenere i risultati del diagramma adimensionale, scegliamo β_w unitaria e pertanto:

$$a_{sw} = \beta_w \cdot \omega_{sw} = 1 \cdot \omega_{sw} = 0.2 \quad (120)$$

Nelle Figure 42, 43, 44 è mostrata la semplice costruzione grafica che dà il vettore risultante dell'armatura trasversale in tutti i casi.

Noto il vettore risultante, il taglio resistente adimensionale, come dimostrato al punto 8.1, può essere letto direttamente sul disegno: solo per comodità di confronto i segmenti orizzontali, la cui lunghezza è il taglio omogeneizzato (ovvero il taglio adimensionale avendo fissato $\beta_w = 1$), sono stati riportati come segmenti verticali nel diagramma superiore. Le tre curve corrispondono a quelle della Figura 41.

Nel caso b (Figura 39 e Figura 43) osserviamo, come abbiamo già rilevato, che, per valori di α inferiori a circa 60° (ad esempio quando alla staffa verticale si aggiunge una staffa inclinata di 135°), l'angolo di inclinazione dei puntoni che corrisponde al vettore risultante delle due armature θ_2 è maggiore di quello che corrisponde al vettore della sola staffa verticale θ_1 . Pertanto il taglio è teoricamente inferiore.

Vi è però da tener presente che il calcolo plastico (su cui si fonda il metodo del traliccio ad inclinazione variabile dei puntoni compressi) considera il solo rispetto dell'equilibrio ed entrambe le armature snervate. Un'analisi più sofisticata (comprensiva del legame sforzi-deformazioni) rivelerebbe che la resistenza alla rottura in presenza di due ordini di staffe non è, nella realtà, inferiore a quella offerta da un solo ordine di staffe. L'analisi numerica svolta, nella memoria citata, mediante le tecniche di programmazione non lineari, pur basandosi sul solo equilibrio, esclude la staffa inclinata perché nella ricerca del valore massimo del taglio considera qualunque valore della tensione nelle armature, purché inferiore a quello di snervamento.

Figura 42
Costruzione grafica del
diagramma del taglio
resistente adimensionale:
caso c.

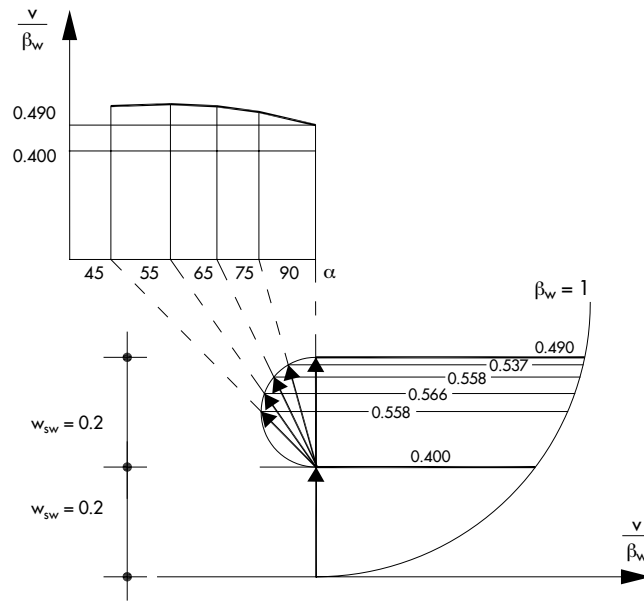


Figura 43
Costruzione grafica del
diagramma del taglio
resistente adimensionale:
caso b.

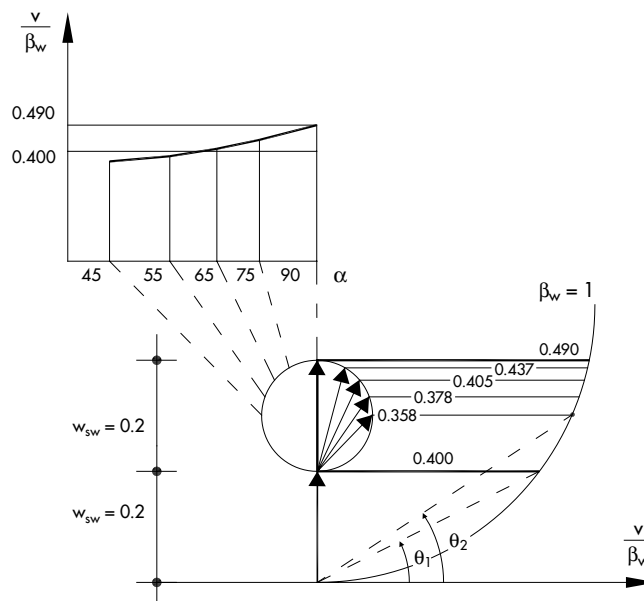
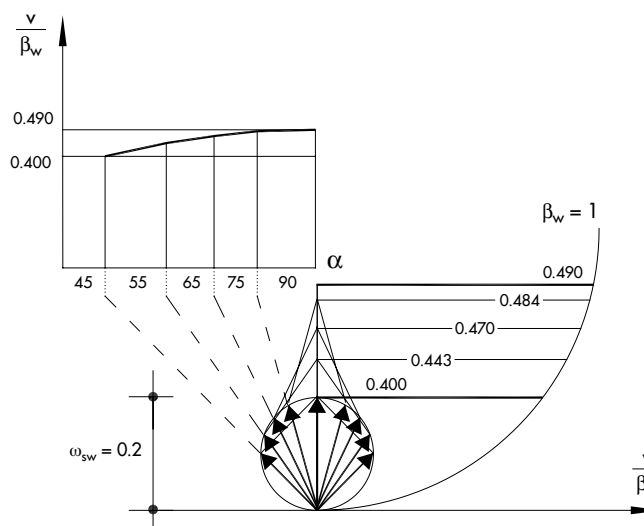


Figura 44
Costruzione grafica del
diagramma del taglio
resistente adimensionale:
caso a.



9. Valore interpretativo del metodo dell'armatura equivalente

Il caso della staffa inclinata di 135° , ovvero con un'inclinazione così sfavorevole per cui, addirittura, se aggiunta, diminuisce teoricamente il taglio resistente che darebbe la staffa verticale da sola, ci fa domandare: ma questa strana staffa (che non "taglia" le fessure inclinate di θ) risulterebbe teoricamente tesa o compressa?

Con il metodo dell'armatura equivalente è semplice rispondere a questa domanda. Come mostra la Figura 45, basta "scompattare" il disegno inscritto nel cerchio di equivalenza aprendolo a 90° (come abbiamo spiegato al punto 3.1), così da evidenziare i poligoni di equilibrio sulla faccia inferiore e sulla faccia laterale del pannello d'anima.

A questo scopo è sufficiente concentrarci sul vettore \vec{v} e ricordarci che è stato ottenuto sovrapponendo due vettori ortogonali con la stessa lunghezza: l'artificio grafico (evidenziato nella Figura 45) di considerarne la punta come l'insieme di due "semi-punte" simmetriche, aiuta

l'interpretazione del disegno.

Non è necessario eseguire alcun calcolo, trattandosi di cogliere solo qualitativamente il fenomeno. Eseguendo la scomposizione vettoriale delle forze di taglio agenti sul pannello armato (vedi il commento alla Figura 35) rileviamo che anche la staffa inclinata è tesa (Figura 46).

Può essere interessante allora domandarci: quale è l'esempio di un caso in cui sono compresse le armature in un pannello soggetto a sole forze di taglio?

Conviene innanzitutto chiarire che il limite superiore all'angolo d'inclinazione dei puntoni compressi ($\theta_{max} = 45^\circ$), angolo misurato rispetto alla direzione longitudinale, è relativo ad elementi lineari (travi e pilastri), mentre perde di significato per elementi "estratti" da lastre caricate nel loro piano (Mancini et al., 1996), pag. 311.

Consideriamo un elemento di lastra in c.a. soggetto a sole azioni taglianti di piano; rimandiamo al nostro libro (Stagnitto & Barzoni, 2015) i lettori interessati all'estensione del metodo

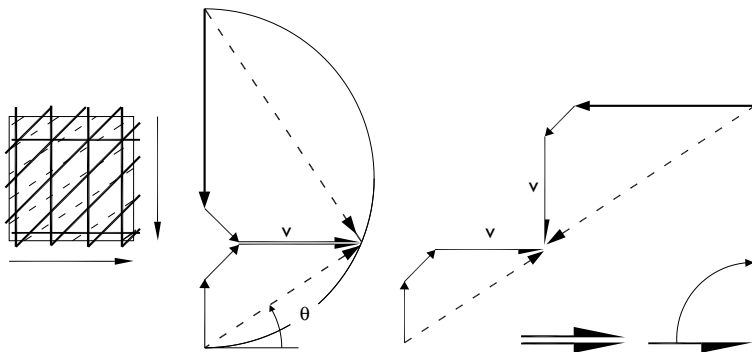


Figura 45
Scomposizione della figura risolvete nei poligoni di equilibrio componenti.

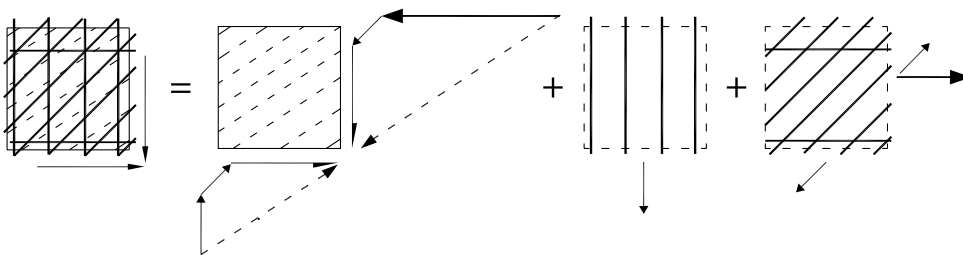


Figura 46
Scomposizione vettoriale delle forze di taglio agenti sul pannello armato.

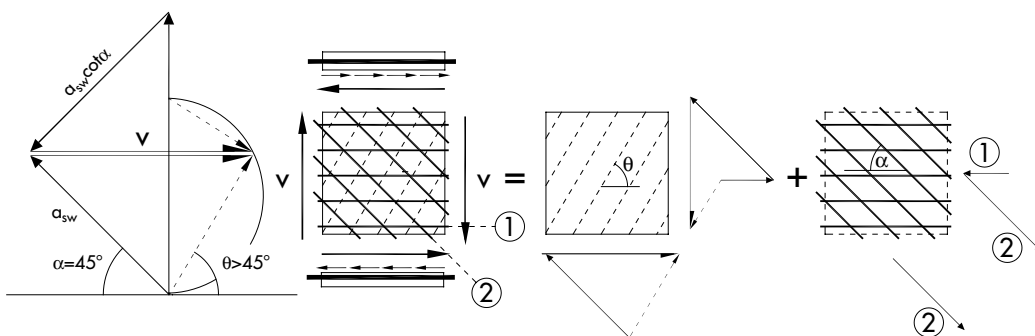


Figura 47
Scomposizione vettoriale dei tagli agenti su un elemento di lastra piana in c.a. ($\theta < 45^\circ$).

dell'armatura equivalente agli elementi bidimensionali soggetti a generici stati di sforzo piano (cioè non soggetti a solo taglio nel piano).

La Figura 47 mostra il caso in cui solo un'armatura (quella identificata con il numero 1) segue una delle direzioni delle azioni taglianti. Quando l'altra armatura (identificata con il numero 2) è inclinata, ad esempio, di 45° i più alti valori del taglio resistente, si ottengono per valori di θ superiori a 45° . *La prima armatura, in questo caso, risulta compressa.* È interessante osservare che anche in questo caso la scomposizione vettoriale può eseguirsi in assenza di calcoli in quanto si tratta di cogliere solo qualitativamente il fenomeno.

10. Conclusioni

Il metodo grafico dell'armatura equivalente, spiegato in questo articolo, permette il calcolo immediato del taglio resistente per ogni densità di armatura trasversale e per ogni inclinazione della stessa, seguendo la teoria del traliccio ad inclinazione variabile dei puntoni compressi, adottato

dalle normative nazionale ed internazionale. Il metodo è fondato sulla seguente interpretazione meccanica: i puntoni compressi di calcestruzzo sono stati assimilati ad un'armatura trasversale in acciaio la cui densità è equivalente alla larghezza dell'anima della sezione dell'elemento in c.a.

Grazie a questa interpretazione, abbiamo sviluppato un metodo di calcolo immediato che, in un tempo *sorprendentemente breve*, tratta problemi altrimenti difficilmente risolvibili (come la compresenza di armature trasversali disposte secondo differenti giaciture). Il metodo proposto può diventare, con un minimo di pratica, talmente intuitivo da permettere di progettare e di verificare letteralmente "a colpo d'occhio".

Il lettore che ha avuto la pazienza di dedicare un breve tempo di attenta riflessione a questo approccio insolito, ne sarà certamente ripagato: le tecniche che ha appreso si prestano infatti ad un'immediata applicazione pratica, come avrà compreso seguendo i confronti con gli esempi numerici appositamente scelti, tratti da testi autorevoli di letteratura.

Bibliografia

- Angotti F., Guiglia M., Marro P., Orlando M. (2011) - Progetto delle strutture in calcestruzzo armato con l'Eurocodice UNI-EN 1992-1-1 e le Norme Tecniche per le costruzioni, Hoepli, Milano.
- Calvi G.M., Nascimbene R. (2011) Progettare i gusci, IUSS Press - Eucenter, Pavia.
- Campana S. (2013) - *Éléments en béton armé soumis à une combinaison de flexion, effort tranchant et forces de déviation*, Thèse de doctorat EPFL IBETON n° 5574, Advisors: Muttoni A., Fernández R. M., Lausanne.
- Colajanni P., La Mendola L., Mancini G., Recupero A. (2011) - Shear resistance of r.c. beams provided with differently-inclined transverse reinforcement, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in C.A., Studi e Ricerche, vol. 31, Politecnico di Milano.
- Eurocodice 2 (2005) - Progettazione delle strutture in calcestruzzo: UNI EN 1992-1.1:2005.
- Eurocode 2 Commentary (2008) - European Concrete Platform ASBL, Brussels.
- Muttoni A., Schwartz J., Thurlimann B., (1997) - De-

sign of Concrete Structures with Stress Fields, Birkhauser Verlag, Basel, Suisse.

Mancini G., Recupero A., Scilipoti C.D. (1996) - Taglio nel c.a. in presenza di armature d'anima longitudinali e trasversali, Scuola di Specializzazione in Costruzioni in C.A., Studi e Ricerche vol. 21, Politecnico di Milano.

Norme Tecniche per le Costruzioni (2008) - D.M.14 gennaio 2008, Norme Tecniche per le Costruzioni, G.U. n. 29 del 4 febbraio 2008.

Stagnitto G., Barzoni E. (2013) - Argomenti di Tecnica delle Costruzioni, CLU, Pavia.

Stagnitto G., Barzoni E. (2015) - Calcolo immediato a taglio delle strutture in c.a. Il metodo dell'armatura equivalente, Hoepli, Milano.

Stagnitto G., Bonfante M. (2011) - Calcolo immediato delle sezioni in calcestruzzo armato. I diagrammi di interazione N-M col metodo del vettore unico, Hoepli, Milano.

Rosenblueth E. (1955) - Shell Reinforcement Not Parallel to Principal Stresses, Journal of the American Concrete Institute ACI, 27(1), 61-71.

Gli autori

Ing. Giuseppe Stagnitto

Ingegnere civile, si è dedicato all'insegnamento di Tecnica delle Costruzioni, a studi sullo sviluppo storico della Scienza e della Tecnica delle Costruzioni, alla consulenza e alla progettazione strutturale. Ha collaborato alla realizzazione di complesse opere edili e civili (www.giuseppestagnitto.it). Per la Hoepli ha scritto, insieme con Marco Bonfante, il libro *Calcolo immediato delle sezioni in calcestruzzo armato* (2011). Per la CLU di Pavia ha pubblicato *Fondamenti di Tecnica delle Costruzioni* (2012), *Evoluzione scientifica e costruzioni* (2005) e *Complementi di Tecnica delle Costruzioni* (2004).

Ing. Erica Barzoni

Ingegnere civile-ambientale, ha collaborato all'insegnamento di Scienza delle Costruzioni e di Tecnica delle Costruzioni in corsi della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pavia. Si dedica, insieme all'Ing. Giuseppe Stagnitto, alla formulazione di metodi alternativi per il progetto delle costruzioni in calcestruzzo armato, anche per una verifica immediata dei risultati del calcolo computerizzato (www.calcoloimmediato.it). È coautrice del libro *Calcolo immediato a taglio delle strutture in c.a.*, edito dalla Hoepli, Milano. È docente nei corsi di aggiornamento professionale organizzati dalla Commissione Strutture dell'Ordine degli Ingegneri di Pavia.